

Méthode des éléments-finis par l'exemple

Daniel Choi¹

LMNO

Groupe Mécanique Modélisation Mathématique et Numérique

Université de Caen, Bld Maréchal Juin, 14032 Caen Cedex, France

Version Janvier 2016

1. daniel.choi@unicaen.fr

Ce document est inspiré d'un cours enseigné en **Master Ingénierie Mécanique** à l'université de Caen. Il s'inspire de nombreux ouvrages bien plus complets tels que [Bat96] et [ZT00], ainsi que divers documents de collègues universitaires. Il est destiné aux étudiants en Master de Mathématiques appliquées et Mécanique ainsi qu'aux élèves ingénieur.

Ce document est bien sur incomplet : il manque des chapitres entiers, des démonstrations, des exemples, etc. Toute remarque est la bienvenue, même en ce qui concerne les probablement nombreuses fautes d'orthographe et de Français.

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Problème aux limite et formulation variationnelle, quelques exemples	11
1.1.1	Problème modèle 1d	11
1.1.2	Problème modèle 2d ou 3d : problème de Poisson	12
1.1.3	Problème 2d : élasticité plane linéaire	12
1.1.4	Problème 2d/3d : problème de Stokes	13
1.1.5	Problèmes non-linéaires	14
1.1.6	Problèmes dynamiques	14
2	Cadre théorique : espaces de Hilbert et espaces de Sobolev	15
2.1	Espace vectoriel normés de fonctions	16
2.2	Espaces de Banach	16
2.3	Espaces de Hilbert	16
2.4	Exemples : \mathbb{L}^2 et les espaces de Sobolev	17
2.4.1	Espace des fonctions de carré intégrable \mathbb{L}^2	17
2.4.2	Espaces de Sobolev H^m	18
2.5	Représentation de Riesz	19
2.6	Théorèmes de projection dans un Hilbert	20
2.7	Régularité des Espaces de Sobolev	21
2.7.1	Notion de trace dans un espace de Sobolev	21
2.7.2	Inégalité de sobolev	23
3	Formulation variationnelle	25
3.1	Problème variationnel abstrait : théorème de Lax-Milgram	25
3.2	Méthode de Galerkin	28
3.3	Méthode de Galerkin en dimension finie	29
3.3.1	Premier exemple et exercices	30

3.3.2	Élément-finis et méthode de Galerkin	31
4	Éléments-finis par l'exemple : Éléments-finis isoparamétriques	33
4.1	Problème 1D, interpolation P^1	34
4.1.1	Maillage SEG2 et interpolation linéaire par morceaux : élément P^1 de Lagrange	34
4.1.2	Éléments-finis P^1 , le système linéaire	36
4.1.3	Technique d'assemblage	38
4.1.4	Application numérique	40
4.1.5	Estimation d'erreur	43
4.1.6	Programme Scilab	43
4.2	Élément-finis 1D dans le plan, structures en treillis	44
4.3	Exemple 2D sur maillage triangulaire : Problème de Poisson	46
4.3.1	Maillage triangulaire à 3 nœuds et interpolation P^1 de Lagrange	47
4.3.2	Matrice de rigidité élémentaire	49
4.3.3	Calcul du second membre	51
4.3.4	Prise en compte des conditions aux limites et résolution	51
4.4	Exemple 2D sur maillage quadrangulaire : Problème de Poisson avec condition de Dirichlet et condition de Neuman	52
4.4.1	Maillage quadrangulaire à 4 nœuds et interpolation linéaire	53
4.4.2	Interpolation linéaire sur un quadrangle	54
4.4.3	Élément de référence et formule de Jacobi	55
4.5	Exemple 3D : Mécanique des milieux continus	58
4.5.1	Élément tétraédriques à 4 nœuds	59
4.5.2	Élément prisme à 6 nœuds	61
4.5.3	Élément cubique à 8 nœuds	64
5	Exemples non-isoparamétrique	65
5.1	Poutre en flexion, interpolation P^3 sur maillage SEG2	65
5.1.1	Le modèle de Bernoulli	65
5.1.2	Principe des travaux virtuels	66
5.1.3	Maillage SEG2 et Interpolation P^3	67
5.1.4	Calcul de la matrice rigidité à la flexion	68
5.2	Element MITC4 pour les plaques en flexion	69
6	Annexes : Rappels de Mathématiques	73
6.1	Rappels en algèbre linéaire, analyse matricielle	73
6.2	Rappels d'optimisation quadratique	73
6.3	Théorèmes de projection	74
6.4	Intégration numérique de Gauss	75

6.4.1	3 noeuds d'intégration de Gauss sur un triangle de référence	75
6.4.2	7 noeuds d'intégration de Gauss sur un triangle de référence	75
6.4.3	4 noeuds d'intégration de Gauss sur un quadrangle de référence	76

CHAPITRE 1

Introduction

La méthode des éléments-finis (MEF) est une méthode d'approximation numérique de solutions de problèmes aux limites statiques ou dynamiques tels que

- diffusion thermique
- mécanique des milieux continus (solides et fluides)
- électromagnétisme et électrostatique
- Problèmes multi-physiques (couplage thermo-mécanique ou piézo-électrique)

mais en fait, absolument tous les problèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) aux limites dans des domaines divers tels que la finance.

Il s'agit, comme dans toutes les méthodes numériques, de trouver une approximation discrète.

Pour faire bref, d'un problème différentiels aux limites linéaire, on trouve une formulation variationnelle associée équivalente, dont on calcule une approximation de la solution en projetant sur un espace de dimension finie, ce qui revient à résoudre au final un système linéaire, chose que les ordinateurs savent très bien faire.

Bien que construit sur des problèmes linéaires statiques, les problèmes dynamique et non-linéaires peuvent également être traités par la méthodes des éléments-finis via en linéarisant et procédant pas à pas ou par des méthodes de réduction.

L'appellation éléments finis vient de la décomposition du domaine d'étude en éléments : ils sont souvent représentés par un maillage, voir figure 1.1

Historiquement, l'origine de la méthode peut se trouver dans les travaux de Fermat et Bernoulli (1743) avec le calcul des variations, puis il faut attendre le début du XXème siècle avec les progrès en analyse avec la méthode de Galerkin se basant sur des théorèmes de projection dans

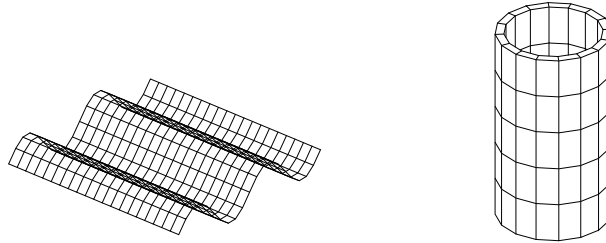


FIGURE 1.1 – Maillages

les espaces de Hilbert.

En 1943 Robert Courant introduit le principe variationnel avec des fonctions de base à support locaux ouvrant la voie à une division d'un domaine considéré en "éléments". Cependant ce n'est qu'avec le développement des ordinateurs que ces travaux trouvent leurs applications avec les travaux pionniers de Zienkiewicz et Argyris qui définiront la méthode en 1960.

Ce qui amène le succès de la méthode et sa puissance est l'apport du calcul matriciel, introduit par un ingénieur civil anonyme. La méthode connaît alors un développement fulgurant accompagné par les progrès de l'informatique.

La méthode des éléments-finis est une méthode puissante basée sur une théorie mathématique rigoureuse.

Aujourd'hui, les éléments-finis sont un outil majeur, incontournable en mécanique (fluides et solides, interactions, structures), et applicable dans de nombreux domaines impliquant des problèmes d'EDP aux limites comme par exemple en mathématiques financières ou l'électromagnétisme.

De nombreux codes industriels (solveurs) existent et sont généralement couplés à un logiciel de CAO¹ ou Computer Aided Design (CAD) en Anglais. Citons Ansys, Abaqus, Robot, LS-dyna, Feap, Code-Aster, Cast3M et bien d'autres.

Notation et conventions

Dans ce document, nous serons parfois amené à utiliser quelques conventions de notations propres à la mécanique. En particulier nous utiliserons la convention de sommation par rapport aux indices répétés (on lit également *convention d'Einstein*) et nous noterons souvent les dérivées partielles à l'aide d'un indice précédé d'une virgule.

Nous commençons toutefois par quelques notations utilisés dans ce document qui sont du reste tout à fait usuel.

1. Conception assistée par Ordinateur

Notations

Nous n'avons pas cherché à faire dans l'originalité, ainsi dans tout le document \mathbb{R} désigne l'espace des nombres réels tandis que \mathbb{C} sera l'espace des nombres complexes.

Les quantités scalaire seront systématiquement noté en italique, tandis que les objets vectoriels seront noté soit avec une flèche soit en caractère gras :

On désigne généralement par f ou g une *fonction scalaire*

Les **objets vectoriels** seront souvent désigné par \mathbf{u} dont les composantes u_i sont des quantités scalaires.

Le symbole Ω représentera généralement un domaine à bord régulier de \mathbb{R}^n , où n en mécanique désigne souvent les nombres 2 ou 3.

Convention de sommation suivant les indices répétés

La convention d'Einstein sur la sommation sur les indices ou exposants répétés est une convention destinée à alléger les écritures dans les formules mathématiques sans pour autant les rendre ambigu.

La convention implique une sommation sur des termes produits dès lors qu'ils présentent des indice répétés :

Ainsi, par exemple, pour $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ et $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$, deux vecteurs de \mathbb{R}^n , le produit scalaire :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

où l'on remarque l'indice i qui apparaît répété, sera noté plus simplement :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_i y_i.$$

De même pour un produit de matrices $C = BA$:

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^m b_{ki} a_{ij} \quad \longrightarrow \quad c_{kj} = b_{ki} a_{ij}.$$

Si un vecteur \mathbf{x} a pour composantes (x_1, x_2, \dots, x_n) dans la base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, on écrit

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$$

Si on note, dans \mathbb{R}^3 le produit mixte des vecteurs de la base canonique :

$$\varepsilon_{ijk} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k)$$

On peut écrire le produit mixte de trois vecteurs \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{c} par

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \quad \longrightarrow \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k,$$

où on a appliqué la convention sur les trois indices répétés i , j et k .

Notation des dérivées partielles

En mécanique et en mathématiques en général, nous avons souvent affaire à des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Ainsi pour alléger les notations on préférera utiliser la notation en indice précédé d'une virgule :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= f_{,x} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= u_{i,j} \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} &= u_{i,jk}. \end{aligned}$$

Si on considère une fonction scalaire f défini sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (à valeur dans \mathbb{R}) alors pour toute direction $\mathbf{h} = [h_1, h_2, \dots, h_n]^\top$, on écrit la dérivée de f dans la direction \mathbf{h} :

$$\nabla f(x)(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i \quad \longrightarrow \quad \nabla f(x)(\mathbf{h}) = f_{,i}(x) h_i.$$

où on a également utilisé la convention de sommation suivant les indices répétés.

Indices et exposant Grecs ou Latins

Bien que la plupart des théories mathématique soit présenté dans un espace abstrait de dimension n , en Mécanique les problèmes sont généralement posés dans les variables d'espace. C'est à dire qu'on travaille en dimension 3 en général et en dimension 2 pour des problèmes plans.

Alors, il est une façon bien commode si un problème est en dimension 2 ou 3 :

- l'utilisation réservée des indices et exposants Grecs en dimension 2,
- l'utilisation réservée des indices et exposants Latins en dimension 3.

Ainsi le système

$$\sigma_{ij,j} + f_j = 0 \quad i = \{1, 2, 3\}$$

identifie immédiatement un problème à trois dimension (avec une sommation sur j), tandis que dans

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + f_\alpha = 0 \quad \alpha = \{1, 2\}$$

on reconnaît un problème en dimension 2 (avec une sommation sur β).

1.1 Problème aux limites et formulation variationnelle, quelques exemples

Dans cette section nous présentons sans les résoudre quelques problèmes typiques pouvant être résolus par la MEF. Il s'agit systématiquement de problèmes aux limites dont on peut trouver une formulation variationnelle équivalente. Les problèmes de Cauchy ne sont a priori pas résolubles par la MEF, du moins pas de façon directe.

1.1.1 Problème modèle 1d

Soit le problème aux limites pour une fonction scalaire définie sur $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} -ku'' + \alpha u &= f & [0, 1] \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

que l'on réécrit sous sa forme variationnelle équivalente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1([0, 1]) \text{ telle que} \\ \int_{[0,1]} ku'u^{*'} + \alpha uu^* = \int_{[0,1]} fu^* \quad \forall u^* \in H_0^1([0, 1]) \end{array} \right. \tag{1.2}$$

On précisera plus tard cette équivalence et l'espace de Sobolev $H_0^1([0, 1])$, qui correspond à un espace de fonctions pour lesquelles les intégrales de (1.2) ont un sens et qui satisfont aux conditions aux limites $u(0) = u(1) = 0$, voir la section 2.4 et plus précisément la proposition 2.7.4.

Ce problème peut modéliser l'équilibre thermique d'une barre chauffée à ses extrémités et plongée dans une pièce maintenue à une température donnée, k désignant alors le coefficient de diffusion thermique de la barre et α est un coefficient de perte de chaleur due à la convection de l'air.

Pour $k = 1$, $\alpha = 1$ et $f = 1$, nous traçons sur la figure 1.2 la solution éléments-finis avec une interpolation polynomiale de degré 1 sur une subdivision de $[0, 1]$ en 3 intervalles (éléments) en comparaison de la solution exacte u_{exact} du problème (1.1) :

$$u_{exact} = 1 + \frac{1}{e-1}e^x + \frac{e}{e+1}e^{-x}.$$

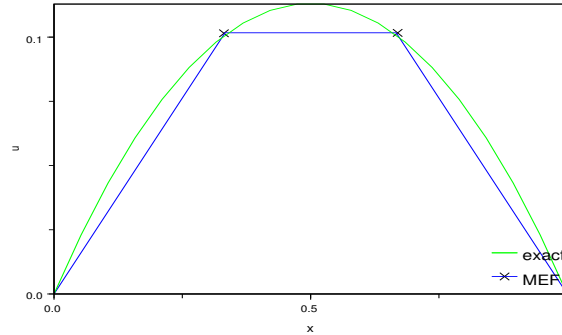


FIGURE 1.2 – La solution exacte et une solution EF (3 éléments) du problème (1.2)

1.1.2 Problème modèle 2d ou 3d : problème de Poisson

Soit le problème aux limites pour une fonction scalaire définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \Omega \\ u &= 0 & \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.3)$$

que l'on réécrit sous sa forme variationnelle équivalente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla u^* = \int_{\Omega} f u^* \quad \forall u^* \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Ce problème peut modéliser par exemple l'équation d'une membrane d'une membrane soumise à une pression f et des conditions d'encastrement au bord de la membrane. Ce problème peut également modéliser un problème thermique sans convection, un problème d'électrostatique, ou même un problème d'écoulement d'un fluide irrotationnel incompressible.

1.1.3 Problème 2d : élasticité plane linéaire

On considère le *principe des puissances virtuelles* d'un solide élastique en équilibre statique, dont l'une des dimensions étant petite permet une approximation en contrainte approximativement plane, réduisant le problème 3D en un problème 2D. Le solide représenté par un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est soumis à une densité surfacique d'effort \mathbf{f} , est encastré sur une partie Γ du bord,

tandis que le reste est libre de contrainte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in V_{adm} \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \bar{\sigma}(\mathbf{u}) : \bar{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^* \quad \forall \mathbf{u}^* \in V_{adm} \end{array} \right. \quad (1.5)$$

où on reconnaît dans le terme de gauche la puissance virtuelles des efforts intérieurs. \mathbf{u} désigne un déplacement sur Ω , il se décompose en deux composantes.

Le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ est défini par la loi de comportement élastique qui le relie au tenseur des déformations (linéarisés) $\bar{\varepsilon}$:

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla(\mathbf{u}) + \nabla(\mathbf{u})^T).$$

Dans le cas d'un matériau isotrope la loi de comportement est la loi de Hooke et s'écrit :

$$\bar{\sigma} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \text{tr}(\bar{\varepsilon}(\mathbf{u})) I + \frac{E}{1 + \nu} \bar{\varepsilon}(\mathbf{u}),$$

où E désigne le module d'Young (rigidité) et ν est le coefficient de Poisson.

L'espace V_{adm} désigne l'espace des déplacement cinématiquement admissible, i.e. satisfaisant aux conditions d'encastrement sur le bord Γ , nous verrons qu'il s'agit d'un sous-ensemble d'un espace de Sobolev :

$$V_{adm} = \{ \mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2 / \mathbf{u}|_{\Gamma} = 0 \}.$$

On note que la condition de bord libre n'apparaît pas explicitement dans la formulation (1.5) : elle est implicite.

La formulation (1.5) est équivalente au problème aux limites :

$$\begin{aligned} \text{div } \bar{\sigma} + \mathbf{f} &= 0 & \Omega \\ \mathbf{u} &= 0 & \Gamma \\ \bar{\sigma} \mathbf{n} &= 0 & \partial\Omega - \Gamma \end{aligned}$$

Pour des raisons de simplicité nous avons présenté le cas de contrainte plane, mais il est clair que ce n'est en aucun cas une hypothèse nécessaire pour la MEF.

1.1.4 Problème 2d/3d : problème de Stokes

On considère un fluide Newtonien visqueux et incompressible à faible nombre de Reynolds occupant une surface/volume $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. Si la vitesse est imposée égale à \mathbf{v}_0 à la frontière

$\partial\Omega$. La vitesse \mathbf{v} et la pression p à l'état stationnaire satisfait au problème aux limites :

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{v} + \nabla p &= 0 & \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 & \Omega \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 & \partial\Omega \end{aligned}$$

dont la formulation variationnelle s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{v}, p) \in V_{adm} \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v}^* + \int_{\Omega} \mathbf{v}^* \cdot \nabla p = 0 \quad \forall (\mathbf{v}^*, p^*) \in V_{adm} \\ \int_{\Omega} p^* \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{array} \right. \quad (1.6)$$

où

$$V_{adm} = \left\{ \mathbf{v}^* \in [H^1\omega]^n, p^* \in \mathbb{L}^2(\Omega) / \mathbf{v}^*|_{\Gamma} = \mathbf{v}_0 \right\}.$$

1.1.5 Problèmes non-linéaires

Tous les problèmes précédents sont des problèmes linéaires et en effet la MEF est définie à partir des problèmes linéaires puisqu'en pratique, il revient à résoudre un système linéaire.

Naturellement, il est tout à fait possible d'utiliser la MEF pour des problèmes non-linéaires (Navier-Stokes, grandes déformations, élasto-plasticité, contacts) mais ces derniers passeront systématiquement par un processus de linéarisation et la résolution se fera de façon itérative et non plus directe.

1.1.6 Problèmes dynamiques

Les problèmes précédemment présentés sont tous statiques. C'est parce que la méthode des éléments finis est définie à partir d'un problème aux limites, différent d'un problème de valeurs initiales (problème de Cauchy). Néanmoins, dans un cadre dynamique, la MEF peut encore être mise à contribution soit de façon directe avec des calculs de modes propres, soit de façon indirecte et itérative avec un incrément de temps avec un algorithme de différence-finie comme l'algorithme de Newmark qui résout un problème aux limites à chaque pas de temps.

CHAPITRE 2

Cadre théorique : espaces de Hilbert et espaces de Sobolev

Nous rappelons ici quelques éléments d'analyse fonctionnelle permettant de définir la méthode de Galerkin qui est la base théorique incontournable de la méthode des éléments-finis.

Ces connaissances sont nécessaires pour maîtriser la base mathématique mais il est tout à fait possible de n'en retenir que les principaux résultats de projections et en omettant la partie analyse des espaces de Sobolev pour une pratique élémentaire des éléments-finis. Les élèves non-mathématiciens pourront alors passer directement au chapitre suivant, ne retenant que la section sur la méthode de Galerkin.

Cependant, il est impossible de comprendre l'essence de la méthode et surtout ses limitations sans une connaissance profonde de ces questions, notamment en ce qui concerne les théorèmes de traces et sans lesquelles il est tout à fait possible dans la pratique d'essayer de résoudre par la MEF des problèmes qui n'ont pas de sens mathématiques (et donc potentiellement pas de sens du tout).

Nous nous bornerons aux résultats principaux éventuellement sous une forme simplifiée et généralement sans démonstration pour lesquelles nous renvoyons à un cours vrai d'analyse fonctionnelle tel que [Bre80, LM68].

2.1 Espace vectoriel normés de fonctions

En Analyse, les fonctions sont classés par ensemble : fonctions mesurables, fonctions continues, fonctions dérivables, fonctions bornées, fonctions intégrables, fonctions de carré intégrables, fonctions dérivable à dérivée intégrables, etc . . .

Dans la suite, on voudra souvent comparer les fonctions entre elles. Il est assez naturel de définir l'égalité entre deux fonctions, mais comment définir qu'une fonction est "voisine" d'une autre ?

En effet, si on veut trouver, par exemple, des approximations à une solution d'un problème d'EDP aux limites, il faut nécessairement définir la notion d'approximation. On choisit alors de définir un nombre définissant la distance entre deux fonctions, un nombre nul si et seulement si les deux fonctions sont égales, autrement dit une *norme*.

2.2 Espaces de Banach

Avant de présenter les espaces de Hilbert, il convient de définir une classe de fonctions plus générale, qui les contient :

Définition 2.2.1. Soit E un espace vectoriel normé. On dit que E est un Banach s'il est complet pour sa norme.

Autrement dit E est un Banach si toute suite de Cauchy y converge. Cette propriété fondamentale est à la base de tout résultat d'existence dans ces espaces. Notons que c'est une propriété qu'il faut distinguer de la notion de *fermeture*. La différence étant subtile.

Voyons quelques exemples d'espaces de Banach

- L'espace des nombres réels \mathbb{R} .
- L'espace des nombres complexes \mathbb{C} .
- Les espaces \mathbb{R}^n pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.

2.3 Espaces de Hilbert

Définition 2.3.1. Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$ et qui est complet pour la norme induite, $\|\cdot\|_H$.

Dans toute la suite de ce chapitre, H désigne un espace de Hilbert muni de son produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$ et sa norme $\|\cdot\|_H$:

$$\|u\|_H^2 = (u, u)_H.$$

Pour simplifier l'exposé, nous nous bornerons aux espaces de Hilbert réels.

Les espaces de Hilbert sont donc un cas particulier d'espace de Banach. Ce qui est remarquable avec les espaces de Hilbert est qu'on y retrouve la plupart propriétés des espaces de dimensions finies : théorème de décomposition, projection orthogonale, base orthonormée et surtout identification de l'espace dual. Cela permet de transposer naturellement un problème continu à sa discrétisation à partir de ces espaces.

Commençons par quelques définitions et propriétés triviales.

Définition 2.3.2. Soient $u, v \in H$, on dit que u et v sont orthogonaux dans H si

$$(u, v)_H = 0.$$

Théorème 2.3.3. (théorème de décomposition) – Soit V un sous-espace vectoriel fermé de H . on note l'espace orthogonal à V :

$$V^\perp = \{u \in H / (u, u^*) = 0 \quad \forall u^* \in V\}.$$

On a alors

$$H = V \oplus V^\perp.$$

Exercice : Montrez le théorème de décomposition à partir du théorème 2.6.1 de projection sur un convexe fermé

Proposition 2.3.4. (Identité du parallélogramme) – $\forall u, v \in H$,

$$\|u + v\|_H^2 + \|u - v\|_H^2 = 2\|u\|_H^2 + 2\|v\|_H^2.$$

Définition 2.3.5. Le dual de H est l'ensemble des formes linéaires continues¹ sur H . Le dual est noté H' : $\forall L \in H'$, il existe $c > 0$ telle que

$$|L(u)| \leq c\|u\|_H.$$

2.4 Exemples : \mathbb{L}^2 et les espaces de Sobolev

2.4.1 Espace des fonctions de carré intégrable \mathbb{L}^2

Soit Ω est un domaine ouvert mesurable de \mathbb{R}^n . L'exemple fondamental est l'espace des fonctions de carré intégrable

$$\mathcal{L}^2(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurable sur } \Omega / \int_{\Omega} |f|^2 < \infty \right\}.$$

1. On parle ici de dual topologique puisqu'on demande la propriété de continuité. Notons que dans un espace de vectoriel de dimension finie, la notion de dual topologique est confondue avec celle de dual algébrique puisque dans de tels espaces, toutes les normes sont équivalentes.

Le produit scalaire est naturellement défini par

$$(u, v)_{\mathbb{L}^2} = \int_{\Omega} uv.$$

Le produit scalaire induit bien une norme si on quotiente les fonctions de $\mathcal{L}^2(\Omega)$ par les fonctions nulles presque partout dans Ω :

$$\mathbb{L}^2(\Omega) = \mathcal{L}^2(\Omega) / \sim$$

où on identifie

$$u = v \quad \text{dans } \mathbb{L}^2 \iff u(x) = v(x) \text{ pour presque tout } x \in \Omega.$$

Théorème 2.4.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un domaine ouvert, muni de son produit scalaire naturel, l'espace $\mathbb{L}^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

L'intégrale de Lebesgue assurant la complétude de l'espace $\mathbb{L}^2(\Omega)$ est bien un espace de Hilbert. Notons cependant que cette complétude se paye par la définition des fonctions *presque partout* seulement. Elles ne sont donc a priori pas continues (au sens classique) et leur dérivées sont définies au *sens généralisés* ou au sens des *distributions*. Malgré cela ces fonctions s'avèrent applicables en pratique, en grande partie grâce au résultat de densité suivant :

Théorème 2.4.2. *Soit Ω un domaine ouvert de \mathbb{R}^n , l'espace des fonctions continues infiniment dérivable à support compact $\mathcal{D} = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$:*

$$\forall u \in \mathbb{L}^2(\Omega), \exists u_n \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ telle que } u_n \rightarrow u \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega).$$

Le principe de la preuve repose sur une technique de suite régularisante basée sur un produit de convolution, voir [Bre80].

Un autre résultat de densité très ressemblant mais différent des espaces de fonctions infiniment dérivables sur un domaine *fermé* $\bar{\Omega}$, noté $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$, sera présenté au sous-paragraphe suivant.

2.4.2 Espaces de Sobolev H^m

A partir de $\mathbb{L}^2(\Omega)$, on définit des espaces de Sobolev³

Définition 2.4.3.

$$H^1(\Omega) = \{v \in \mathbb{L}^2(\Omega) / v_{,i} \in \mathbb{L}^2(\Omega), i = 1, \dots, n\}.$$

2. Le résultat reste vrai dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

3. La famille des espaces de Sobolev est plus large que celle que nous présentons ici :

$$W_p^m(\Omega) = \{u \in \mathbb{L}^p(\Omega) / D^\alpha u \in \mathbb{L}^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}$$

Autrement dit nous nous restreignons aux cas $p = 2$, seuls cas correspondants à des espaces de Hilbert.

on le munit du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = \int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} u_{,i} v_{,i}$$

et on note la norme correspondante

$$\|u\|_{H^1}^2 = (u, u)_{H^1} = \int_{\Omega} |u|^2 + |\nabla u|^2$$

Théorème 2.4.4. *L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration. Comme $H^1(\Omega)$ est pré-hilbertien par définition, il reste à démontrer qu'il est complet.

Soit u_n une suite de Cauchy dans $H^1(\omega)$. $\mathbb{L}^2(\Omega)$ étant complet, il existe u et v_i tels que

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u && \mathbb{L}^2(\Omega) \\ u_{n,i} &\rightarrow v_i && \mathbb{L}^2(\Omega). \end{aligned}$$

Ces convergences ont également lieu dans l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$, puisque les éléments de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ s'y injecte continument. Comme la dérivation est une opération continue dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, on a

$$u_{n,i} \rightarrow u_{,i} \quad \mathcal{D}'(\Omega),$$

si bien que $v_i = u_{,i}$ par unicité de la dérivée, qui prouve que $u_{,i} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, et donc que $v \in H^1$. On a donc montré

$$u_n \rightarrow u \quad H^1(\Omega).$$

□

Théorème 2.4.5. *Soit Ω un domaine ouvert de \mathbb{R}^n à bord régulier⁴, pour tout m , l'espace $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$.*

Ce dernier théorème de densité est très important en analyse fonctionnelle car elle permet d'étendre aux fonctions des Sobolev, des propriétés qui n'y ont pas de sens a priori comme la notion de *trace*, qui nous permet de justifier la notion de *conditions aux limites* dans les problèmes.

2.5 Représentation de Riesz

On a alors le résultat fondamental :

4. à préciser

Théorème 2.5.1. *Représentation de Riesz – Soit L une forme linéaire continue définie sur un Hilbert H . Il existe un unique $u \in H$ tel que*

$$(u, v)_H = L(v) \quad \forall v \in H.$$

Démonstration. Si L est identiquement nul, alors on a trivialement que $u = 0$.

On peut donc supposer désormais que L n'est pas identiquement nul et donc que le sous-espace $\text{Ker}(L)^\perp$ est non réduit à $\{0\}$. Il existe alors un élément $u_0 \in \text{Ker}(L)^\perp$ qu'on peut choisir de norme (dans H) égale à 1.

Pour tout $v \in H$, on remarque que $(L(u_0)v - L(v)u_0) \in \text{Ker}(L)$, si bien qu'on a

$$(u_0, L(u_0)v - L(v)u_0)_H = 0 \implies L(v) = (L(u_0)u_0, v)_H.$$

On remarque alors qu'on peut prendre $u = L(u_0)u_0$.

Supposons désormais que u_1 et u_2 satisfont à la représentation de L , alors

$$(u_1, v)_H = (u_2, v) \quad \forall v \in H \implies u_1 = u_2 \text{ dans } H.$$

Ce qui montre l'unicité de la représentation de L . □

La signification du théorème de Riesz est que dans les espaces de Hilbert comme dans les espaces vectoriels de dimension finie, il y a un isomorphisme naturel entre l'espace et son dual.

Il faut toutefois se méfier car en dimension infinie, les normes n'étant généralement pas équivalentes, des confusions sont possibles : bien souvent dans les applications on se trouve plutôt dans des situations où l'espace de travail est un espace de Hilbert V qui s'injecte continuellement dans un espace plus grand H (par exemple $V = H_0^1$ et $H = \mathbb{L}^2$) et l'identification est pratique dans H mais pas dans V . On a alors la situation

$$V \hookrightarrow H \sim H' \hookrightarrow V'.$$

2.6 Théorèmes de projection dans un Hilbert

On considère dans cette section les théorèmes de projection dans un espace de Hilbert qui forment la base théorique de la MEF, dont on verra qu'elle est essentiellement une méthode d'approximation par projection.

Théorème 2.6.1. *(Projection sur un convexe) – Soit H un espace de Hilbert et K un convexe fermé de H , alors $\forall u \in H, \exists ! u_k \in K$ tel que*

$$\|u - u^*\|_H \geq \|u - u_k\|_H \quad \forall u^* \in K.$$

De plus, on a

$$(u - u_k, u^* - u_k) \leq 0 \quad \forall u^* \in K.$$

C'est un théorème de projection : u_k est l'unique projeté de u sur K . On renvoie la preuve en annexe. Un corollaire immédiat est le résultat suivant :

Corollaire 2.6.2. Soit H un espace de Hilbert et K un convexe fermé de H , et $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur H , alors $\forall u \in H, \exists ! u_k \in K$ tel que

$$\|u - u^*\|_a \geq \|u - u_k\|_a \quad \forall u^* \in K.$$

De plus, on a

$$a(u - u_k, u^* - u_k) \leq 0 \quad \forall u^* \in K.$$

où on a noté

$$\|u\|_a^2 = a(u, u).$$

2.7 Régularité des Espaces de Sobolev

2.7.1 Notion de trace dans un espace de Sobolev

La notion de trace dans les espaces de Sobolev est une notion difficile mais très importante pour les applications à la méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis est censé donner des approximations de solutions de problème aux limites, or les espaces de Sobolev sont *a priori* définis à partir de de la notion de fonctions *mesurables*, où des fonctions peuvent être identiques à un ensemble de mesure nulle près. Ainsi, pour un domaine, les bords étant d'une dimension inférieure, elles sont de mesure nulle. Autrement dit la restriction d'une fonction d'un espace de Sobolev à une partie du bord du domaine n'est pas défini *a priori*. C'est une difficulté subtile qui peut échapper à un utilisateur de la méthode des éléments-finis non averti, mais qui est très importante pour définir exactement quels chargements sont admissibles et nous verrons que certains chargements sont non admissibles mais réalisables numériquement ce qui engendrent des calculs qui n'ont pas de sens.

On commence par une remarque sur un sous espace très important qui est l'*adhérence* ou la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. on note :

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}. \quad (2.1)$$

On rappelle que l'adhérence ou la fermeture d'un espace est l'espace contenant toute les limites de toutes les suites de Cauchy de l'espace considéré. Ainsi, si un espace vectoriel normé est complet, il est confondu avec sa fermeture ou son adhérence.

Proposition 2.7.1. Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$, on a $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 2.7.2. D'après le théorème 2.4.2, on pourrait penser que puisque l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans \mathbb{L}^2 , il doit être dense dans $H^1(\Omega)$. Qui peut le plus peut le moins... Sauf que les topologies dans \mathbb{L}^2 et dans H^1 sont différentes et ne doivent pas être confondues ; c'est un point subtil et important. Ainsi, si Ω est un domaine borné, une fonction de H^1 peut être approchée par une suite de fonction de \mathcal{D} convergente au sens \mathbb{L}^2 , mais pas nécessairement au sens H^1 , on renvoie à l'annexe (à rédiger...) pour un contre-exemple.

La définition 2.1 n'est pas du tout pratique, il est temps d'introduire les opérateurs traces sans lesquelles on ne pourrait définir mathématiquement les conditions aux limites.

Pour fixer les idées, posons $\Omega = [0, 1]^2$ et définissons pour toute fonction u_c de classe \mathcal{C}^1 sur $\overline{\Omega}$, l'opérateur trace par la restriction de u_c sur le bord $\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \Omega / x_1 = 0\}$:

$$\gamma(u_c) = u_c|_{\Gamma}.$$

A priori pour une fonction de H^1 , la trace sur Γ n'a pas de sens. Cependant, on va montrer qu'il est possible de prolonger, à tout l'espace H^1 , l'opérateur trace définie pour les fonctions continues :

On a :

$$u_c(0, x_2) = u_c(x_1, x_2) - \int_0^{x_1} u_{c,1}(s, x_2) ds,$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\gamma(u_c)\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma)}^2 &= \int_0^1 |u_c(0, x_2)|^2 dx_2 \\ &= \int_0^1 \left| u_c(x_1, x_2) - \int_0^{x_1} u_{c,1}(s, x_2) ds \right|^2 dx_2 \\ &\leq \int_0^1 |u_c(x_1, x_2)|^2 dx_2 + \int_{\Omega} |u_{c,1}(s, x_2)|^2 ds dx_2 \end{aligned}$$

d'où, en intégrant de nouveau sur x_1

$$\begin{aligned} \|\gamma(u_c)\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma)}^2 &\leq \int_{\Omega} |u_c|^2 + \int_{\Omega} |u_{c,1}|^2 \\ &\leq \|u_c\|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

si bien que, d'après le théorème de Hahn-Banach, l'opérateur trace peut être prolongé par continuité dans H^1 . On généralise sans démonstration :

Théorème 2.7.3. Soit Ω un domaine ouvert borné de \mathbb{R}^d à bord régulier (\mathcal{C}^∞ par morceaux) et soient $\Gamma \subset \partial\Omega$ et l'application trace, γ , définie pour les fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $\overline{\Omega}$.

$$\gamma(u) = u|_{\Gamma}.$$

Alors l'opérateur trace γ se prolonge continument dans tout l'espace $H^1(\Omega)$ et il existe $c > 0$,

$\forall u \in H^1(\Omega) :$

$$\|\gamma(u)\|_{L^2(\Gamma)} \leq c\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Le théorème de traces (2.7.3) est fondamental : il va nous permettre de définir des conditions aux limites dans les espaces de Sobolev. Sans ce résultat, rien ne serait justifié.

L'opérateur trace nous permet alors de caractériser facilement l'espace H_0^1 :

Proposition 2.7.4. *Soit Ω un domaine ouvert borné de \mathbb{R}^n à bord régulier, alors*

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) / u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

2.7.2 Inégalité de Sobolev

Nous pouvons aller plus loin que la notion de trace. En fait, les espaces de Sobolev H^m sont de plus en plus réguliers à mesure que m augmente.

Soit Ω un domaine borné et régulier (de classe C^1) de \mathbb{R}^n , si $k > n/2$ alors il existe C tel que quel que soit $u \in H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$,

$$\|u\|_{C^{k-n/2}} \leq \|u\|_{H^k}$$

Théorème 2.7.5. Rellich-Kondrachov *Soit Ω un domaine borné et régulier (de classe C^1) de \mathbb{R}^2 ,*

$$H^1(\Omega) \subset C_0(\overline{\Omega})$$

avec injection compactes.

A compléter et préciser..

CHAPITRE 3

Formulation variationnelle

On a vu dans les exemples de l'introduction, que les problèmes aux limites possèdent une formulation variationnelle équivalente. Ce sont sur ces formulations qu'on se base pour établir non seulement les résultats d'existence et d'unicité (pour les problèmes linéaires) mais aussi ce sont ces formulations qui sont à la base de la MEF.

3.1 Problème variationnel abstrait : théorème de Lax-Milgram

Espace de Hilbert, sous-espace affine et sous-espace vectoriel associé

On considère dans cette section un espace de Hilbert V et un sous-espace *affine* fermé $V_{adm} \subset V$. On note V_0 l'espace vectoriel associé à V_{adm} , i.e.

$$\forall u, u^* \in V_{adm}, \quad (u^* - u) \in V_0.$$

On a naturellement $V_0 \subset V$. Comme V_0 est un sous-espace fermé de V , il possède également une structure d'espace de Hilbert pour le produit scalaire induit.

On peut également écrire, si $u \in V_{adm}$:

$$V_{adm} = u + V_0.$$

Remarque 3.1.1. *Travailler dans un espace affine signifie que le problème aux limites n'est pas homogène. En général, les formulations variationnelles sont présentées avec un espace vectoriel*

plutôt qu'affine (i.e. V_{adm} est confondu avec V_0), nous avons fait le choix de faire une présentation directement plus générale.

Théorème d'existence et unicité

Théorème 3.1.2. (Lax-Milgram) – Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue sur V et soit L une forme linéaire définie et continue sur V , définissant le problème variationnel abstrait suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_{adm} \text{ tel que} \\ a(u, u^* - u) = L(u^* - u) \quad \forall u^* \in V_{adm} \end{cases} \quad (3.1)$$

ce qui revient à écrire :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_{adm} \text{ tel que} \\ a(u, u^*) = L(u^*) \quad \forall u^* \in V_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Si a est coercive sur V_0 , i.e. $\exists c > 0$ telle que

$$a(v, v) \geq c\|v\|_V \quad \forall v \in V_0,$$

alors (3.2) est un problème bien posé,

Si de plus a est symétrique, alors l'unique solution de (3.2) minimise dans V_{adm} la fonctionnelle dite d'énergie :

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v).$$

Autrement dit :

$$J(u) \leq J(u^*) \quad \forall u^* \in V_{adm}.$$

Démonstration. Remarquons que lorsque u^* parcourt tout V_{adm} , $(u^* - u)$ parcourt tout V_0 . La formulation variationnelle (3.2) entraîne :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_{adm} \text{ tel que} \\ a(u, v^*) = L(v^*) \quad \forall v^* \in V_0 \end{cases}$$

Soit $u_0 \in V_{adm}$ arbitraire, posons $v = u - u_0 \in V_0$. Le problème (3.2) se réécrit donc

$$\begin{cases} \text{Trouver } v \in V_0 \text{ tel que} \\ a(v, v^*) = \tilde{L}(v^*) \quad \forall v^* \in V_0 \end{cases}$$

avec

$$\tilde{L}(v^*) = L(v^*) - a(u_0, v^*).$$

La coercivité dans V_0 signifie simplement que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ définit un produit scalaire induisant une norme équivalente à la norme de V dans V_0 . Le théorème 2.5.1 de représentation

de Riesz indique simplement que puisque $L \in V' \subset V'_0$, il existe un unique représentant $v \in V_0$ tel que

$$a(v, u^*) = L(u^*) \quad \forall u^* \in V_0.$$

On en déduit simplement $u = v + u_0$, l'unique solution de (3.2).

Considérons maintenant la fonctionnelle J et développons pour tout $u^* \in V_{adm}$:

$$\begin{aligned} J(u^*) &= J(u + u^* - u) \\ &= J(u) + \frac{1}{2} [a(u, u^* - u) + a(u^* - u, u)] - L(u^* - u) + a(u^* - u, u^* - u) \end{aligned}$$

Ainsi, si $a(., .)$ est symétrique, il vient :

$$\begin{aligned} J(u^*) &= J(u) + \underbrace{a(u, u^* - u) - L(u^* - u)}_{=0} + \underbrace{a(u^* - u, u^* - u)}_{\geq 0} \\ &\leq J(u). \end{aligned}$$

On remarque au passage que

$$\begin{aligned} (\nabla J(u), v) &= \frac{1}{2} [a(u, v) + a(v, u)] - L(v) \\ (\nabla^2 J(u), v^2) &= a(v, v) \end{aligned}$$

d'où on déduit notamment que la coercivité de a entraîne que J est strictement convexe sur V_{adm} .

Réciproquement, si $u \in V_{adm}$ minimise J dans V_{adm} , alors les conditions d'optimalité (sur un ensemble convexe), voir le théorème 6.2.1, s'écrivent :

$$\nabla J(u)(u^* - u) \geq 0 \quad \forall u^* \in V_{adm}$$

C'est à dire que

$$\nabla J(u)(u^*) \geq 0 \quad \forall u^* \in V_0$$

Comme V_0 possède une structure d'espace vectoriel, on a aussi l'inégalité inverse en prenant $-u^*$:

$$\nabla J(u)(-u^*) \geq 0 \quad \forall u^* \in V_0.$$

On en déduit que

$$\nabla J(u)(u^*) = 0 \quad \forall u^* \in V_0.$$

Autrement dit, u est l'unique solution de (3.2). □

Remarque 3.1.3. Si la forme bilinéaire a est corecive dans V_0 , elle y définit une norme équivalente à la norme dans V_0 :

$$\|v\|_a \sim \|v\|_V \quad \forall v \in V_0$$

Il faut remarquer qu'en général ce n'est pas vrai pour dans l'espace V . Souvent dans les exemples comme, (problème de Poisson, problème d'élasticité), la forme bilinéaire a possède un noyau non-réduit à $\{0\}$ dans V (constantes, déplacements rigides). Un des effets des conditions aux limites est d'éliminer ces éléments.

3.2 Méthode de Galerkin

Soit u l'unique solution du problème variationnel (3.2) bien posé

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_{adm} \text{ tel que} \\ a(u, u) = L(u) \quad \forall u^* \in V_0 \end{cases}$$

dans le cadre du théorème de Lax-Milgram 3.1.2, i.e. la forme bilinéaire $a(., .)$ est continue et coercive.

Soit un sous-espace fermé $V^h \subset V$, on définit

$$V_{adm}^h = V^h \cap V_{adm}$$

et

$$V_0^h = V^h \cap V_0.$$

La forme bilinéaire $a(., .)$ est trivialement coercive sur V_0^h , puisque $V_0^h \subset V_0$, alors le théorème de Lax-Milgram s'applique également pour le problème variationnel de Galerkin :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^h \in V_{adm}^h \text{ tel que} \\ a(u^h, u^*) = L(u^*) \quad \forall u^* \in V_0^h \end{cases} \quad (3.3)$$

et il existe une unique solution u^h au problème (3.3), c'est la solution de Galerkin dans le sous-espace V_{adm}^h .

Ce qui est naturellement intéressant, c'est la relation liant les solutions u et u^h . C'est le résultat à la base des théorèmes de convergence de la MEF :

Théorème 3.2.1. *La solution u^h du problème de Galerkin (3.3) dans V_{adm}^h est la meilleure approximation de la solution u de (3.2) dans V^h au sens de la norme induite par $a(., .)$, i.e. ,*

$$\|u - u^h\|_a \leq \|u - u^*\|_a \quad \forall u^* \in V_{adm}^h.$$

La solution de Galerkin s'interprète aussi comme la projection orthogonale de u sur V_{adm}^h au sens produit scalaire $a(., .)$.

Démonstration. On évalue pour tout $u^* \in V_{adm}^h$:

$$\begin{aligned} a(u^* - u, u^* - u) &= a(u^* - u_h + u_h - u, u^* - u_h + u_h - u) \\ &= a(u^* - u_h, u^* - u_h) + 2a(u^* - u_h, u_h - u) + a(u_h - u, u_h - u), \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} a(u^* - u_h, u_h - u) &= a(u^* - u_h, u_h) - a(u^* - u_h, u) \\ &= L(u^* - u_h) - L(u^* - u_h) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} a(u^* - u, u^* - u) &= \underbrace{a(u^* - u_h, u^* - u_h)}_{\geq 0} + a(u_h - u, u_h - u) \\ &\geq a(u_h - u, u_h - u). \end{aligned}$$

□

Exercice : Montrer, sous les hypothèse du théorème 3.1.2, une généralisation pour tout convexe fermé $K \subset V_{adm}$: la solution du problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_k \in K \text{ tel que} \\ a(u_k, u^* - u_k) \geq L(u^* - u_k) \quad \forall u^* \in K \end{cases} \quad (3.4)$$

est la projection orthogonal de u sur K suivant le produit scalaire $a(\cdot, \cdot)$.

3.3 Méthode de Galerkin en dimension finie

Dans le cadre du théorème 3.2.1, si le sous-espace V^h est de dimension finie, alors nous allons voir que la solution de Galerkin peut être obtenue en résolvant un système linéaire discret :

Plaçons nous tout d'abord dans le cas où V_{adm} est un sous-espace vectoriel, de dimension n , il existe alors une base ϕ_i de V_{adm}^h . Comme tout élément de V_{adm}^h se décompose de façon unique dans cette base, le problème de Galerkin 3.3 revient à trouver les composantes de u^h , représenté par le vecteur $\hat{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$, dans cette base :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \hat{u}^h \in \mathbb{R}^n \text{ tel que} \\ a(u^h, u^*) = L(u^*) \quad \forall u^* \in V_{adm}^h \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \text{Trouver } \hat{u} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que} \\ a(u_i \phi_i, \phi_j) = L(\phi_j) \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Si bien que nous avons :

Proposition 3.3.1. Dans l'espace vectoriel V_{adm}^h de dimension égale à n , le problème de Galerkin 3.3 revient à trouver les composantes $\hat{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ de u^h en résolvant le problème matriciel

$$K\hat{u} = L,$$

où K est une matrice carrée symétrique de dimension $n \times n$ et L un vecteur de dimension n dont les composantes sont :

$$K_{ij} = a(\phi_i, \phi_j), \quad \text{et} \quad L_j = L(\phi_j)$$

Le problème continu est ainsi approché par un problème discret. La discrétisation se fait dans le choix de l'espace : plus V_{adm}^h sera proche de V_{adm} et meilleure sera l'approximation.

Supposons qu'on ait une suite d'espaces $V_{adm}^n \subset V_{adm}$ tels que quel que soit $v \in V_{adm}$, il existe une suite $v^n \in V_{adm}^n$ telle que

$$v^n \rightarrow v \quad V$$

alors le théorème 3.2.1 garantit que la suite des solutions u^n des solutions des problèmes de Galerkin 3.3 converge vers la solution du problème continu.

3.3.1 Premier exemple et exercices

Reprenons le problème (1.1) et sa formulation variationnelle associée,

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1([0, 1]) \text{ telle que} \\ a(u, u^*) = L(u^*) \quad \forall u^* \in H_0^1([0, 1]) \end{cases} \quad (3.5)$$

avec

$$a(u, u^*) = \int_{[0,1]} ku'u^{*'} + \alpha uu^*$$

$$L(u^*) = \int_{[0,1]} fu^*$$

1. Montrer qu'une solution du problèmes au limites (1.1) est nécessairement une solution du problème variationnel (4.2) (la réciproque, plus difficile est renvoyée en annexe).
2. Montrer que si k et α sont de même signe , alors le problème (3.5) est bien posé.
3. Qu'en est il lorsque k et α sont de signes opposés ?
4. Fixons $k = 1$, $\alpha = 1$ et posons

$$V_{adm}^1 = Vect \{ \sin(\pi x) \} .$$

Trouvez la solution de Galerkin du problème (4.2) dans V_{adm} .

5. Répétez la question précédente avec

$$V_{adm}^2 = Vect \{ \sin(\pi x), \sin(2\pi x) \} .$$

6. Comparez les deux solutions précédentes avec la solution exacte à calculer.
7. Soit la suite d'espaces

$$V_{adm}^n = Vect \{ \sin(\pi x), \sin(2\pi x), \dots, \sin(n\pi x) \}.$$

montrer que la suite de solutions de Galerkin correspondantes, u^n , converge vers la solution de (4.2).

3.3.2 Élément-finis et méthode de Galerkin

La méthode des éléments finis dérive de la méthode de Galerkin en choisissant V_{adm}^h sur la base d'une décomposition du domaine sur lequel un problème aux limites est posé. Ainsi, un intervalle de \mathbb{R} est divisé en segments, une géométrie simple de \mathbb{R}^2 est décomposé en triangle, en quadrangles,...

CHAPITRE 4

Éléments-finis par l'exemple : Éléments-finis isoparamétriques

Il est assez délicat de 'théoriser' la méthode des éléments-finis. La pratique pouvant facilement s'écarter du cadre théorique rigoureux. Dans un premier temps nous nous concentrerons sur des MEF dérivant du principe de Galerkin, voir le théorème 3.2.1, à savoir que nous projetons les solutions sur un sous-espace caractérisé par une interpolation polynomiale par morceaux.

Même si le principe de la méthode est essentiellement très simple : discrétisation, choix d'une base, calcul des matrices puis résolution d'un système linéaire, la pratique recèle une bonne quantité de techniques qu'il n'est pas aisé de théoriser et de présenter d'un seul coup.

Suivant les cas considérés, des difficultés apparaissent dans le choix de la *discrétisation*, le choix de l'*interpolation polynomiale* par morceaux, la technique d'*intégration numérique*, la façon dont on implémente les conditions aux limites qui peuvent être homogènes ou non-homogènes, il faut aussi pouvoir implémenter des *conditions de périodicité*.

Nous choisissons donc de présenter des exemples génériques à partir desquels il devrait être facile d'adapter la plupart des problèmes aux limites rencontrés dans les applications : on commence par un exemple scalaire 1d où la discrétisation du domaine est triviale : un intervalle réel est subdivisé en sous-intervalles consécutifs. Puis viennent les problèmes plus complexes à plusieurs degrés de liberté par noeuds et à 2 ou 3 variables d'espaces.

Ce qui va caractériser les exemples de ce chapitre est la notion d'*élément isoparamétrique* : on va utiliser la même interpolation polynomiale par morceaux pour décrire à la fois la géométrie du problème (maillage) et pour décrire les inconnues du problème.

4.1 Problème 1D, interpolation P^1

Reprenons le problème le problème aux limites (1.2), présenté en introduction, pour une fonction scalaire définie sur $[0, 1]$, $f \in \mathbb{L}^2$, mais dans un cadre plus général avec des conditions aux limites non-homogènes a priori :

$$\begin{aligned} -u'' + u &= f \quad [0, 1] \\ u(0) &= u_0 \\ u(1) &= u_1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

que l'on réécrit sous sa forme variationnelle équivalente, voir la preuve de l'équivalence en annexe :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_{adm} \text{ telle que} \\ a(u, u^*) = L(u^*) \quad \forall u^* \in V_0 \end{cases} \quad (4.2)$$

où

$$V_{adm} = \{v \in H^1([0, 1]) / u(0) = u_0, \text{ et } u(1) = u_1\}$$

et

$$V_0 = \{v \in H^1([0, 1]) / u(0) = 0, \text{ et } u(1) = 0\}$$

avec

$$\begin{aligned} a(v, v^*) &= \int_{[0,1]} v'v'^* + vv^* \\ L(v^*) &= \int_{[0,1]} fv^* \end{aligned}$$

4.1.1 Maillage SEG2 et interpolation linéaire par morceaux : élément P^1 de Lagrange

Pour un intervalle la seule subdivision raisonnable est une décomposition en segments successifs : nous subdivisons l'intervalle $\Omega = [0, 1]$ en $n - 1$ segments :

$$\Omega = [0, 1] = \bigcup_i^{n-1} E_i, \quad E_i = [x_i, x_{i+1}]$$

avec les nœuds

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = 1.$$

On appelle cette subdivision *maillage* par analogie au cas 2D exposée un peu plus tard. Les segments sont les *éléments* du maillage. Chaque éléments étant ici délimités par leurs extrémités qui constituent les *nœuds* du maillage. Ce type de maillage est communément nommé 'SEG2', en référence à un maillage constitués de segments définis par leurs deux nœuds extrémités.

Un maillage du domaine Ω est donc défini par deux tableaux : un tableau de *noeuds* et un tableau d'*éléments* :

$$\text{noeud} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 2 & x_2 \\ \vdots & \\ n & x_n \end{bmatrix} \quad \text{element} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ \vdots & & \\ n-1 & n-1 & n \end{bmatrix}$$

Remarquons que les premières colonnes respectives de ces tableaux correspondent à la numérotation des noeuds et des éléments. Cette numérotation peut tout à fait être implicite même si la plupart des logiciels de maillage utilisent une numérotation explicite.

La MEF que nous allons développer est la méthode de Galerkin appliquée à une interpolation polynomiale par morceaux, on définit le sous-espace discrétisé :

$$V^n = \{v \in C_0(\Omega) / v|_{E_l} \text{ est polynôme de degré 1 sur } E_l, \quad l = 1, \dots, n-1\}.$$

C'est à dire l'espace des fonctions continues sur Ω et dont la restriction à chaque élément E_l est un polynôme de degré 1.

On définit une base de V^n avec une famille de fonctions polynomiales de degré 1 sur chaque élément E_i et qu'on caractérise par :

$$\phi_i(x_j) = \delta_{i,j}.$$

C'est à dire que ϕ_i est l'unique fonction continue sur Ω polynomiale sur chaque E_l et qui vaut 1 au noeud de coordonnées x_i et 0 sur tous les autres noeuds. Il y a autant de fonctions ϕ_i que de noeuds et toutes les fonctions de V^n peuvent être engendrées par elles. Les fonctions ϕ_i sont souvent appelées fonctions "chapeaux" à cause de leur forme (voir la figure 4.1.1) et forment une base de l'espace V^n qui est donc de dimension n .

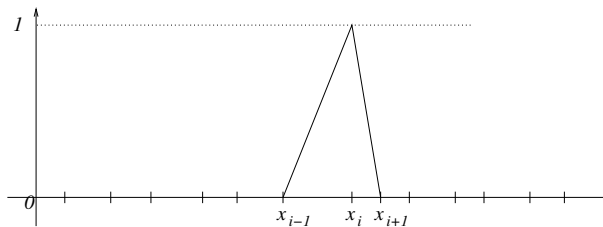


FIGURE 4.1 – Fonction ϕ_i polynomiale par morceaux, valant 1 en x_i et 0 sur les autres noeuds.

Dans cette base, pour chaque $v \in V^n$, on a la décomposition

$$v(x) = \sum_{i=1}^n v_i \phi_i(x).$$

Le choix de cette base est vraiment naturel car une composante v_i représente la valeur de v au nœuds x_i . C'est ce qui rend ce choix pratique dans l'interprétation de la solution éléments-finis qu'on obtient. Ainsi, dans le problème (4.2), les inconnues à déterminer, qu'on nomme généralement *degré de liberté* (ddl) sont les valeurs de u aux nœuds du maillage considéré. Puisque chaque fonction de V^n peut être représentée de façon unique par sa valeurs aux noeuds, on a l'isomorphisme

$$V^n \simeq \mathbb{R}^n.$$

Il faut remarquer que l'espace V^n ne tient pas compte de conditions aux limites. C'est la procédure habituelle avec la méthode des éléments-finis qui va pouvoir s'adapter à toutes les situations : les conditions aux limites vont pouvoir s'exprimer sous la forme de contraintes imposées aux inconnues, qui revient à éliminer certains ddl.

4.1.2 Éléments-finis P^1 , le système linéaire

Revenons au problème (4.2). Il faut pouvoir tenir compte des conditions aux limites : À l'espace discrétisé V^n , nous associons l'espace

$$\begin{aligned} V_{adm}^n &= V^n \cap V_{adm} \\ &= \{v \in V^n / v(0) = u_0 \text{ et } v(1) = u_1\} \end{aligned}$$

Comme V^n est isomorphe à \mathbb{R}^n , une possibilité pour tenir compte de ces conditions aux limites est d'introduire une contrainte sur les vecteurs de \mathbb{R}^n représentant une fonction de V^n :

$$\begin{aligned} V_{adm}^n &\simeq \{\hat{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T \in \mathbb{R}^n / v_1 = u_0 \text{ et } v_n = u_1\} \\ &\simeq \{\hat{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T \in \mathbb{R}^n / C\hat{v} = g\} \end{aligned}$$

avec la matrice C de dimension $2 \times n$:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}.$$

et où le symbole \simeq correspond à *isomorphe*. L'espace vectoriel associé

$$V_0^n = \{v \in V^n / C\hat{v} = 0\}^1.$$

En terme de méthode d'éléments-finis cela revient à résoudre un *problème d'optimisation quadratique sous contrainte*. Pour différentes raisons que nous présentons en annexe nous écartons cette possibilité car ce ne sera pas la méthode recommandée, ni pour les conditions aux limites de type Dirichlet, ni les conditions de type périodicité, même si cette méthode est utilisée par certains codes d'éléments finis. La méthode que nous recommandons pour la prise en compte des conditions aux limites de type Dirichlet ou de périodicité, parcequ'elle est la plus simple et la plus efficace est la méthode de *substitution*.

Nous verrons dans les exemples plus complexes comment traiter cette difficulté technique de façon générale, mais pour le moment nous nous bornerons à remarquer que

$$V_0^n = \text{vect}\{\phi_2, \phi_3, \dots, \phi_{n-1}\} \simeq \mathbb{R}^{n-2}$$

Nous nous plaçons pour le moment, pour simplifier, dans le cas où $V_{adm} = V_0$, c'est à dire lorsque les conditions aux limites sont homogènes. En effet si $u \in V_0^n$ alors les valeurs représentatives de u sont $: [0, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, 0]$, on a la décomposition :

$$\sum_{j=2}^{n-1} u_j \quad \forall u \in V_0$$

Dans ce paragraphe nous noterons

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n-2}$$

Alors nous pouvons réécrire le problème variationnel de la méthode de Galerkin associée au problème (4.2) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_{adm}^n \text{ tel que} \\ a(u, u) = L(u) \quad \forall u^* \in V_0^n \end{cases}$$

sous la forme

$$\begin{cases} \text{Trouver } \hat{u} \in V_{adm}^n \simeq \mathbb{R}^{n-2} \text{ tel que} \\ a(u, u) = L(u) \quad \forall u^* \in V_0^n \simeq \mathbb{R}^{n-2} \end{cases}$$

1. ici $V_0^n = H_0^1([0, 1])$

Or puisque $u, u^* \in V_0$, on peut décomposer

$$\begin{aligned} a(u, u^*) &= a\left(\sum_{i=2}^{n-1} \phi_i u_i, \sum_{j=2}^{n-1} \phi_j u_j^*\right) \\ &= \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=2}^{n-1} u_i a(\phi_i, \phi_j) u_j^* = \hat{u}^\top K_2 \hat{u}^* \end{aligned}$$

où K_2 est une matrice de dimension $(n-2) \times (n-2)$ dont les composantes sont $a(\phi_i, \phi_j)$ pour $i, j = 2, \dots, n-1$. C'est à dire

$$\begin{cases} \text{Trouver } \hat{u} \in \mathbb{R}^{n-2} \text{ tel que} \\ \hat{u}^\top A \hat{u}^* = b^\top \hat{u}^* \quad \forall u^* \in \mathbb{R}^{n-2} \end{cases}$$

Autrement dit, on a le système linéaire à résoudre

$$A \hat{u} = b \tag{4.3}$$

Le système (4.3) est de Cramer avec une matrice symétrique définie positive : C'est une conséquence directe de la coercivité de la forme bilinéaire a dans V_0 et donc dans $V_0^n \subset V_0$. Il suffit alors de l'inverser avec un solveur tel que la méthode du gradient conjugué ou par une factorisation de Choleski pour obtenir l'approximation de Galerkin du problème (4.2) dans le sous espace V_0 . La proposition (??) nous indique alors que c'est la meilleure approximation au sens de la norme induite par a .

Les notations A et b sont arbitraires et peuvent laisser perplexes, elles seront justifiées par la prise en compte générale des conditions aux limites dans une méthode d'éléments-finis, voir section ??.

4.1.3 Technique d'assemblage

Le problème à résoudre étant un simple système linéaire, une difficulté pouvant apparaître est le calcul des coefficients du système. Pour n ddl on a environ n^2 coefficients à calculer a priori. Cela peut devenir rédhibitoire très rapidement : 1 millions de ddl = 1000 milliards de coefficients à calculer et à stocker. C'est tout l'intérêt de la méthode des éléments-finis par rapport à une méthode de Galerkin toute bête : Le choix de l'espace V_0 est justifié tant par sa simplicité que par le fait que les matrices qui en découlent sont extrêmement *creuses* : dans notre exemple (4.2) elle devient même tridiagonale.

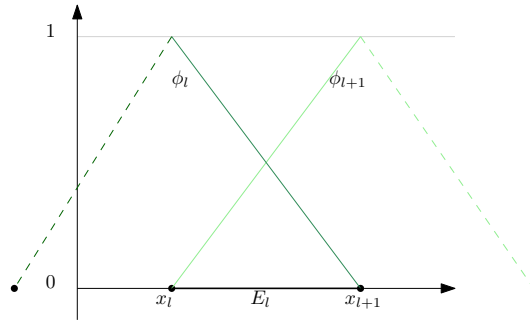
Oublions un instant les conditions aux limites, et construisons les matrices de dimension $n \times n$,

K et M , telles que $\forall v, v^* \in V^n$:

$$\int_{[0,1]} v' v^{*'} = \hat{v}^\top K \hat{v}^*$$

$$\int_{[0,1]} v v^* = \hat{v}^\top M \hat{v}^*.$$

La construction pratique des matrices K et M passe par une technique dite d'assemblage qui calcule les matrices *élément par élément* : on tire avantage du fait que les fonctions d'interpolations de V^n sont à support nul sauf sur deux éléments, ou ce qui revient au même que sur un élément du maillage E_l , défini par les noeuds l et $l+1$, seules les deux fonctions ϕ_l et ϕ_{l+1} sont non-nulles :



On décompose le calcul des matrices K et M sur tous les éléments, et on introduit les matrices élémentaires K_l et M_l :

$$\hat{v}^\top K \hat{v}^* = \sum_{l=1}^{n-1} \int_{E_l} v' v^{*'}$$

$$\hat{v}^\top M \hat{v}^* = \sum_{l=1}^{n-1} \int_{E_l} v v^*$$

Considérons un élément isolé $E_l = [x_l, x_{l+1}]$ rappelons que seules les fonctions ϕ_l et ϕ_{l+1} sont non-nulles, par conséquent, sur un éléments E_l , la décomposition de toute fonction $v \in V^n$ se réduit à

$$v(x) = \phi_l(x)x_l + \phi_{l+1}(x)x_{l+1}$$

$$= \begin{bmatrix} \phi_l(x) \\ \phi_{l+1}(x) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} x_l \\ x_{l+1} \end{bmatrix}$$

On a de même :

$$v'(x) = (\phi_l(x)x_l + \phi_{l+1}(x)x_{l+1})'$$

$$= \begin{bmatrix} \phi_l'(x) \\ \phi_{l+1}'(x) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} x_l \\ x_{l+1} \end{bmatrix}$$

si bien qu'il est pratique de réduire les expressions, en faisant un abus de notation sans ambiguïté :

$$\widehat{\phi}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \phi_l(x) \\ \phi_{l+1}(x) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \widehat{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_l \\ \phi_{l+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{h_l} \begin{bmatrix} x_{l+1} - x \\ x - x_l \end{bmatrix} \quad \forall x \in E_l.$$

de même,

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \phi'_i \\ \phi'_{i+1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow = \begin{bmatrix} \phi'_i \\ \phi'_{i+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{h_i} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

où $h_i = |E_i|$. Ainsi, le calcul effectifs des matrices élémentaires est réduit au calcul des composantes non-nulles :

$$K_i([x_i, x_{i+1}], [x_i, x_{i+1}]) \longrightarrow K_i = \int_{E_i} \frac{1}{h_i^2} \begin{bmatrix} -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} dx,$$

$$M_i([x_i, x_{i+1}], [x_i, x_{i+1}]) \longrightarrow M_i = \int_{E_i} \frac{1}{h_i^2} \begin{bmatrix} \phi'_i & \phi'_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi'_i \\ \phi'_{i+1} \end{bmatrix} dx.$$

Exercice : Montrer que pour chaque élément E_i :

$$K_i = \frac{1}{h_i} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_i = \frac{h_i}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4.1.4 Application numérique

Dans ce paragraphe nous allons détailler numériquement l'exemple précédent. On se donne une subdivision en 3 éléments de longueurs égales :

$$0 \begin{array}{cccc} & E_1 & E_2 & E_3 \\ \hline & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ & \hline & I \end{array}$$

on définit les 4 nœuds par un tableau 'nœud' contenant les abscisses des nœuds :

$$noeud = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

correspondant à

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1/3, \quad x_3 = 2/3, \quad x_4 = 1.$$

Les 3 éléments sont définis selon un tableau de nœuds :

$$element = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

ce qui correspond bien à

$$E_1 = [x_1, x_2], \quad E_2 = [x_2, x_3], \quad E_3 = [x_3, x_4].$$

Alors, puisque $h_1 = h_2 = h_3 = 1/3$, on a (avec un abus d'écriture) :

$$K_1 = K_2 = K_3 = 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

d'où l'assemblage

$$\begin{aligned} K &= 3 \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{K_1} + 3 \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{K_2} + 3 \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}^{K_3} \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De façon analogue, on calcule

$$M = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

D'où

$$KM = K + M = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 56 & -53 & 0 & 0 \\ -53 & 112 & -53 & 0 \\ 0 & -53 & 112 & -53 \\ 0 & 0 & -53 & 56 \end{bmatrix}.$$

Le second membre se calcule de même :

$$L = \frac{f}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

si bien que le système linéaire du problème éléments-finis (4.3) devient :

$$\frac{1}{18} \begin{bmatrix} 112 & -53 \\ -53 & 112 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 56 & 0 \\ 0 & 56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}$$

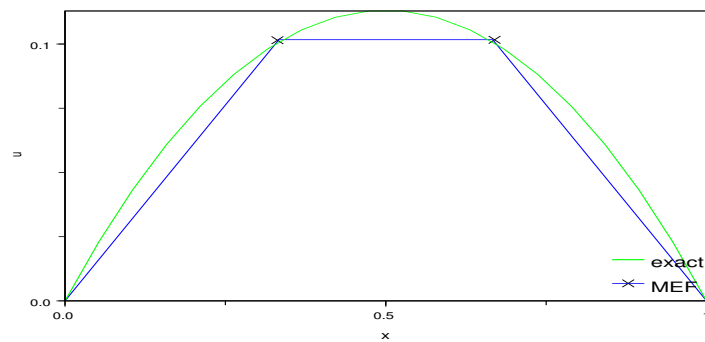


FIGURE 4.2 – Solution exacte et solution EF à 3 éléments du problème (4.2) pour $f = 1$, $u_0 = 0$, $u_1 = 0$.

4.1.5 Estimation d'erreur

Sur la figure 4.2, nous voyons qu'une solution Éléments-finis par interpolation P^1 de Lagrange donne déjà d'assez bon résultats même pour 3 éléments seulement. Nous le voyons bien car une solution exacte est disponible, il est alors facile de comparer. En général cependant (si non à quoi bon se fatiguer) les solutions exactes sont inaccessibles. Lorsqu'on fait un calcul par éléments-finis, il faut s'assurer de la validité du calcul (cela est vrai pour n'importe quel méthode)

4.1.6 Programme Scilab

Voici un programme scilab (compatible version 4.2 – 5.2) résolvant le problème (4.2) par la méthode des éléments finis pour $f = 1, u_0 = 0, u_1 = 0$:

```
clear(); clf();
// Première partie : Préprocesseur
// Définition du maillage et
// Tableau Element/Noeuds

n = 4 ;
noeud = linspace(0,1,n)' ; // numérotation des noeuds implicite
                        // noeud contient les abscisses des noeuds
element = [1:n-1 ; 2:n]' ; // Les éléments sont constitués de noeuds successifs
nombre_element = size(element,1) ;

// Deuxieme partie construction de la matrice de rigidité
// Boucle sur les éléments = assemblage

K = zeros(n,n);          // Initialisation
for i=1:nombre_element
    N = element(i,1:2) ;
    x = noeud(N) ;
    xa = x(1) ; xb = x(2);
    h = abs(xb -xa) ;
    B = [ -1.  1.] ;
    Kel = h*[2 1
              1 2]/6 ;
    Kel = Kel + B'*B /h ;
    K(N,N) = K(N,N) + Kel ;
end

// Troisième partie : Second membre

L = zeros(n,1);          // Initialisation
for i=1:nombre_element
    N = element(i,:) ;
    x = noeud(N) ;
    xa = x(1) ; xb = x(2);
    h = abs(xb -xa) ;
    Le1 = [ 1 ; 1 ] * h /2;
    L(N) = L(N) + Le1 ;
end

// Quatrième partie : Prise en compte des CL par substitution
L1 = [ 1 n] ; // Liste des noeuds sur lesquels
                // la solution est imposée
```

```

L2 = [ 2:(n-1) ] ; // Liste complémentaire à L1
U = zeros(n,1) ; // Initialisation de la solution
// Les conditions aux limites sont implicites

// Cinquième partie Résolution par factorisation de Choleski
KM = sparse(K(L2,L2)) ;
spcho = chfact(KM) ;
U(L2) = chsolve(spcho,L(L2)) ;

```

Exercice : Modifier le programme précédent pour prendre en compte les cas non-homogènes, puis pour f une fonction non-constante arbitraire.

4.2 Élément-finis 1D dans le plan, structures en treillis

Un treillis est une structure mécanique constitué de n_b barres élastiques reliés en leurs extrémités par des liaisons rotules parfait (sans frottements), voir figure 4.3. C'est un exemple où la méthode des éléments finis est confondue avec une résolution exacte du problème par la méthode matricielle : les barres constituant naturellement les éléments de discrétisation de la structure.

Pour nous fixer les idées considérons le treillis constitué de 7 barres élastiques définies à partir de 6 nœuds, soumis à une charge ponctuelle au nœud 2, Fig 4.3 :

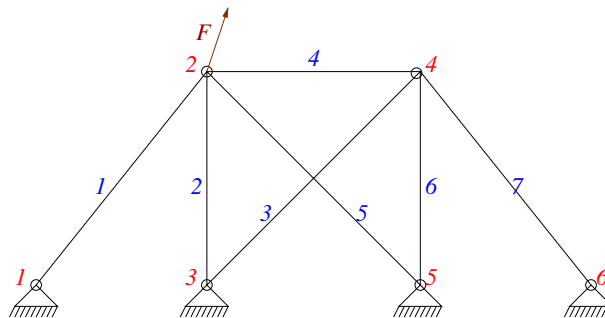


FIGURE 4.3 – Treillis constitué de 7 barres

Considérons une barre B_k de longueur l_k dont les extrémités sont les nœuds N_i et N_j sont de coordonnées (x_i, y_i) et (x_j, y_j) . Le vecteur tangent à la barre, en supposant que l'abscisse curviligne va de N_i vers N_j , est définie par

$$[\mathbf{t}] = \frac{1}{l_k} \begin{bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \end{bmatrix}$$

Posons \mathbf{u} le déplacement de la barre sous l'action de force extérieure. On note par u_t le déplacement tangentiel :

$$u_t = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}$$

Chaque barre se déforme en traction compression uniquement et sur chaque barre nous avons une tension N_k qui entraîne une déformation via la loi de comportement (loi de Hooke)

$$N_k = ES \frac{du_t}{ds} \quad (4.4)$$

où E est le module d'Young et S la section des barres, s désigne une abscisse curviligne et u_t est le déplacement tangentiel, s, autrement dit le déplacement dans la direction de la barre (déformation uniquement en traction compression).

L'énergie de déformation élastique de la barre B_k est alors donné par

$$W_k(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{B_k} \frac{1}{ES} N_k^2$$

L'énergie de déformation élastique structure treillis est simplement la somme des énergies de toutes les barres :

$$W(\mathbf{u}) = \sum_k W_k.$$

En théorie des treillis les seules forces non-négligées sont les forces ponctuelles s'appliquant aux nœuds de la structures, c'est à dire aux extrémités des barres. En conséquence, les tensions dans les barres sont toutes constantes, si bien que d'après la loi de Hooke (4.4), on obtient, en notant $\Delta_x = x_j - x_i$, et $\Delta_y = y_j - y_i$:

$$\begin{aligned} N_k &= \frac{ES}{l_k} \begin{bmatrix} u_j^x - u_i^x & u_j^y - u_i^y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} \\ &= \frac{ES}{l_k} \begin{bmatrix} \Delta_x & \Delta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j^x - u_i^x \\ u_j^y - u_i^y \end{bmatrix} \\ &= \frac{ES}{l_k} \underbrace{\begin{bmatrix} -\Delta_x & -\Delta_y & \Delta_x & \Delta_y \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} u_i^x \\ u_i^y \\ u_j^x \\ u_j^y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D'où l'expression de la matrice (symétrique) de rigidité élémentaire de la barre b_k :

$$\begin{aligned} K_k &= \int_{B_k} \frac{1}{ES} B' * B \\ &= \frac{ES}{l_k} \begin{bmatrix} \Delta_x^2 & \Delta_x \Delta_y & -\Delta_y^2 & -\Delta_x \Delta_y \\ & \Delta_y^2 & -\Delta_x \Delta_y & -\Delta_x^2 \\ & & \Delta_x^2 & \Delta_x \Delta_y \\ & & & \Delta_y^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On construit la matrice de rigidité par *assemblage*, en sommant sur toutes les barres :

$$K = \frac{ES}{l\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{8} & 1 & -1 & -1 & -\sqrt{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -\sqrt{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 4+\sqrt{8} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{8} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4+\sqrt{8} & 0 & -\sqrt{8} & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2+\sqrt{8} & 1 & -1 & -1 & -\sqrt{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1+\sqrt{8} & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 4+\sqrt{8} & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ & & & & & & 4+\sqrt{8} & 0 & -\sqrt{8} & 1 & -1 & -1 \\ & & & & & & & 2+\sqrt{8} & -1 & -\sqrt{8} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 1+\sqrt{8} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 1+\sqrt{8} & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

En tenant compte des conditions aux limites (les nœuds 1 3 5 et 6 sont fixes), seuls quatre ddl (3, 4, 7 et 8) restent inconnus représentant les déplacements des nœuds 2 et 4. On a noté en rouge les composantes de la matrice de rigidité correspondantes.

Il reste alors à résoudre si l'unique charge $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$ est appliquée au nœud 2 :

$$\frac{ES}{l\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 4 + \sqrt{8} & 0 & -\sqrt{8} & 0 \\ & 4 + \sqrt{8} & -\sqrt{8} & 0 \\ & & 4 + \sqrt{8} & 0 \\ & & & 4 + \sqrt{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^x \\ u_2^y \\ u_4^x \\ u_4^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.3 Exemple 2D sur maillage triangulaire : Problème de Poisson

Considérons le problème de poisson suivant

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.5}$$

que l'on réécrit sous sa forme variationnelle équivalente :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla u^* = \int_{\Omega} f u^* \quad \forall u^* \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{4.6}$$

Théorème 4.3.1. *Le problème (4.6) possède une unique solution dans $H_0^1(\Omega)$. De plus la solution minimise, dans $H_0^1(\Omega)$, la fonctionnelle $J(v)$:*

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla(v) - \int_{\Omega} f v.$$

Interprétation physique : Ce problème peut modéliser plusieurs problèmes, modulo des coefficients correspondants :

- L'équilibre thermique d'un milieu représenté par Ω soumis à une source de chaleur f et dont les températures aux bords sont imposés nulles.
- L'équilibre d'une membrane élastique sous l'action de force f , fixée tout le long de son bord.

Pour fixer les idées nous considérons un domaine carré $\Omega = [0, 1]^2$.

Le problème (4.5) modélise une diffusion, les conditions aux limites sont appelées ici condition de Dirichlet homogène. On lit aussi parfois problème de Dirichlet, voir par exemple [Bre80] pour une analyse fonctionnelle complète du problème.

4.3.1 Maillage triangulaire à 3 nœuds et interpolation P^1 de Lagrange

La discrétisation se base sur une subdivision du domaine en triangles. Cette subdivision est appelé maillage, qu'on qualifie ici de triangulaire.

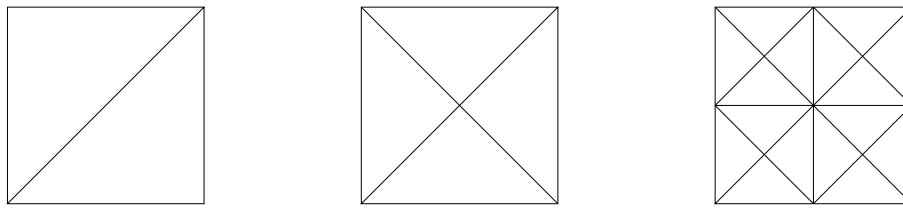


FIGURE 4.4 – 3 exemples de maillages triangulaires du carré Ω .

Sur la figure 4.4, nous avons tracé 3 maillages triangulaires différents du domaine carré Ω . Le premier à gauche est constitué de 2 éléments triangulaires construits à partir de 4 nœuds définissant les sommets des triangles ; chaque triangle (élément) étant défini par ses 3 sommets. La topologie des triangle peut être arbitraire à la seule condition que les noeuds définissant les triangles, et donc les éléments du maillage, soient exclusivement des sommets d'un triangle, autrement dit qu'un noeud ne doit pas se retrouver à l'intérieur d'une arête.

Naturellement la subdivision en triangles peut être une source d'erreur dépendant de la géométrie du domaine. Par exemple, un disque ne peut pas être exactement subdivisé en triangles ou même en quadrangle. Ceci est un autre problème, nous verrons ultérieurement comment estimer l'erreur qui peut résulter de l'approximation de la géométrie.

On désire maintenant choisir une interpolation polynomiale de degré 1 sur chaque élément (triangle) du maillage. Ce choix de fonctions de base vient d'abord du fait que c'est le choix le plus simple possible, à la fois dans sa définition mathématique et dans la pratique réelle.

Sur un triangle, un polynôme ϕ de degré 1 est défini par trois constantes :

$$\phi(x, y) = a + bx + cy.$$

Il suffit donc de connaître sa valeurs en trois points pour le déterminer. On procède comme en

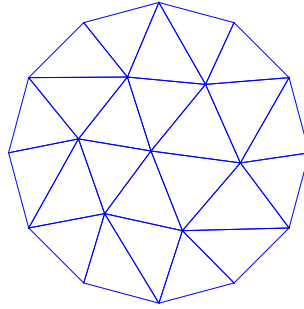


FIGURE 4.5 – Un maillage triangulaire d'un disque.

dimension 1 : si le maillage est constitué de n nœuds sommets, notés N_j et de coordonnées $N_j = (x_j, y_j)$, on définit n fonctions ϕ_i polynomiales de degré 1 sur chaque élément par les relations :

$$\phi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}.$$

Ainsi définies, les fonctions ϕ_i sont continues le maillage tout entier et sont des polynômes de

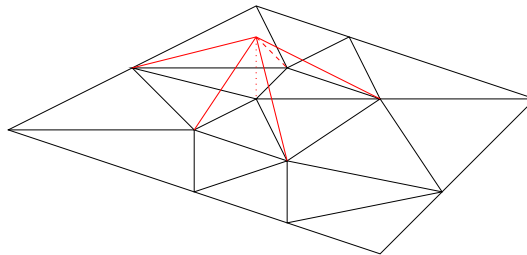


FIGURE 4.6 – Fonction chapeau sur un maillage triangulaire.

degré 1 sur chaque élément ; elles sont donc incluses dans l'espace $H^1(\Omega)$.

$$V = \text{vect}\{\phi_i, i = 1, \dots, n\} \subset H^1(\Omega).$$

Pour toute fonction $u \in V$, nous avons la décomposition :

$$u(x, y) = u_j \phi_j(x, y),$$

Soit $u \in V$ et soit \hat{u} sa représentation matricielle dans la base des fonctions ϕ_i :

$$u = u_i \phi_i = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \end{bmatrix}}_{\hat{u}} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}.$$

les composantes u_j représentent la valeur de u au nœud $N_j = (x_j, y_j)$.

4.3.2 Matrice de rigidité élémentaire

Comme dans le cas 1D, sur un éléments seuls trois fonctions de base sont non-nuls, ainsi la matrice de rigidité se construit par assemblage des matrices de rigidité élémentaire :

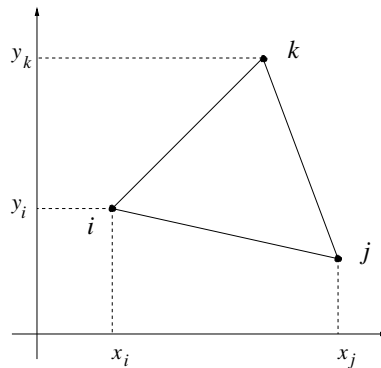


FIGURE 4.7 – Un élément triangulaire à 3 nœuds sommets

Sur un triangle E_l constitué par ses 3 nœuds sommets N_i, N_j et N_k (dans cet ordre), voir Fig 4.7, nous pouvons préciser les expressions de ces fonctions de base, par exemple

$$\phi_k(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_i & x_j \\ y & y_i & y_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_k & x_i & x_j \\ y_k & y_i & y_j \end{vmatrix}} = \frac{(x_i - x)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_i - y)}{(x_i - x_k)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_i - y_k)},$$

ϕ_i et ϕ_j se déduisant par permutation circulaire.

On a donc la décomposition de $u \in V$ qui se réduit à

$$u = \begin{bmatrix} \phi_i & \phi_j & \phi_k \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix}}_{\hat{u}}.$$

d'où

$$\begin{aligned} \nabla u &= \begin{bmatrix} u_{,1} \\ u_{,2} \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{i,1} & \phi_{j,1} & \dots & \phi_{k,1} \\ \phi_{i,2} & \phi_{j,2} & \dots & \phi_{k,2} \end{bmatrix}}_B \hat{u} \end{aligned}$$

Exercice : Montrer que

$$B = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{bmatrix}.$$

avec

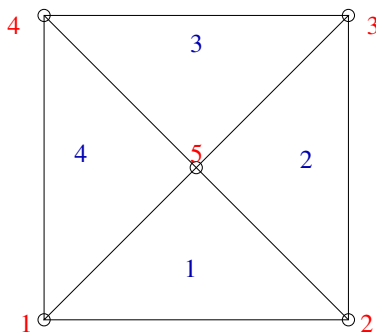
$$A = (x_i - x_k)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_i - y_k).$$

Remarquons qu'on a $|A| = 2|E_l|$ et que la matrice B est constante.

On a alors la matrice de rigidité élémentaire

$$K_l = \int_{E_l} B' B. = |E_l| B' B$$

Afin d'illustrer plus en détail cet exemple, considérons un maillage du domaine carré $\Omega = [0, 1]^2$ défini dans la figure 4.8



Élément	nœuds
1	1,2,5
2	2,3,5
3	3,4,5
4	1,4,5

FIGURE 4.8 – Un maillage triangulaire du carré en 4 éléments et 5 nœuds et le tableau de correspondance élément/nœuds.

Exercice : Montrer que pour le maillage décrit en Fig 4.8, on a avec les abus d'écriture

habituels

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

Soit après assemblage :

$$K = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 & -1 \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 4 \end{bmatrix}$$

4.3.3 Calcul du second membre

Supposons pour simplifier et pour nous épargner pour le moment le tracas du calcul par quadrature des intégrales que f est uniforme sur Ω dans le problème (4.2).

Le second membre se calcule également par assemblage sur tout les éléments du maillage. Sur un élément E_l , on a

$$L_l = \int_{E_l} f \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{bmatrix}$$

En se rappelant que la première colonne (resp. ligne) correspond au ddl associé au nœud i Dans le cas particulier du maillage décrit dans la figure 4.8, avec l'abus d'écriture habituel :

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = |E_l| \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Soit au final, par assemblage

$$L = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}.$$

4.3.4 Prise en compte des conditions aux limites et résolution

Dans le problème (4.2) l'espace des solutions admissibles $V_{adm} = H_0^1(\Omega)$, c'est à dire que les solutions doivent être nul sur le bord de Ω . Dans le maillage considéré, voir Fig. 4.8, seul le nœud 5 n'appartient pas au bord. Si que bien le problème élément-finis se réduit dans ce cas à

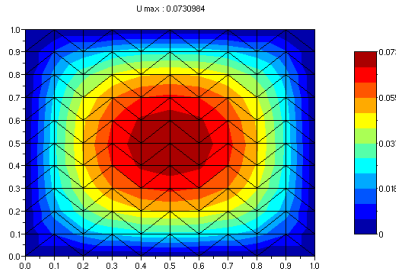


FIGURE 4.9 – Isovaleurs de la solution élément-finis par interpolation P^1 du problème (4.2) avec un maillage triangulaire régulier de 200 éléments définis sur 121 nœuds.

une équation linéaire à une inconnue :

$$[4] [u_5] = [1/3]$$

Cela donne bien entendu une approximation grossière de la solution exacte. Pour avoir de meilleurs résultats, il faut raffiner le maillage, voici un résultat avec un maillage plus fin où nous avons tracé les isovaleurs de la solution éléments-finis :

4.4 Exemple 2D sur maillage quadrangulaire : Problème de Poisson avec condition de Dirichlet et condition de Neuman

Nous reprenons le même problème que précédemment, mais avec des conditions de Dirichlet non-homogène sur une partie Γ_1 du bord $\partial\Omega$ une condition de type Neumann sur la partie complémentaire Γ_2 :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \Omega \\ u &= u^{\Gamma_1} & \Gamma_1 \\ u_{,n} &= F & \Gamma_2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

que l'on réécrit sous sa forme variationnelle équivalente :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_{adm} \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (u^* - u) = \int_{\Omega} f(u^* - u) + \int_{\Gamma_2} F(u^* - u) \quad \forall u^* \in V_{adm} \end{cases} \quad (4.8)$$

où

$$V_{adm} = \{u^* \in H^1(\Omega) \text{ telles que } u^*|_{\Gamma_1} = u^{\Gamma_1}\}$$

Remarquons que l'espace des solutions admissible V_{adm} n'est pas un espace vectoriel. Nous définissons également l'espace vectoriel associé à V_{adm} :

$$V_0 = \{u^* \in H^1(\Omega) \text{ telles que } u^*|_{\Gamma_1} = 0\}$$

Si bien que le problème (4.8) peut se réécrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V_{adm} \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (u^*) = \int_{\Omega} f(u^*) + \int_{\Gamma_2} F(u^*) \quad \forall u^* \in V_0(\Omega) \end{array} \right.$$

Théorème 4.4.1. *Le problème (4.8) possède une unique solution dans V_{adm} . De plus la solution minimise dans V_{adm} la fonctionnelle $J(v)$:*

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla (v) - \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_2} F v.$$

Interprétation physique : pour reprendre la modélisation d'un problème thermique à l'équilibre, u^{Γ_1} s'interprète comme une température imposée sur Γ_1 et F est un flux de chaleur imposée sur Γ_2 .

4.4.1 Maillage quadrangulaire à 4 noeuds et interpolation linéaire

La discrétisation se base sur une décomposition du domaine en quadrangles, comme sur la figure 4.10, où nous présentons différents maillages quadrangulaires du carré Ω :

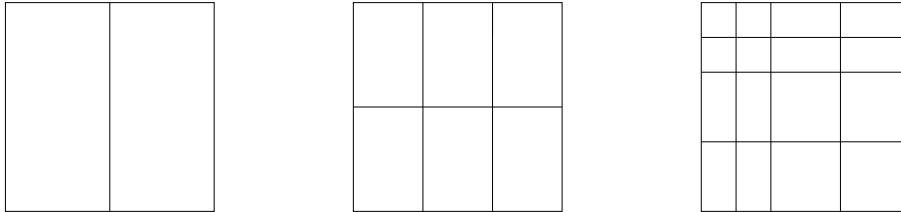


FIGURE 4.10 – 3 exemples de maillages quadrangulaire du carré Ω .

Chaque élément quadrangulaire est donc simplement défini par une liste de 4 noeuds représentant les 4 sommets.

Un maillage sera donc typiquement défini par une liste de noeuds, défini par leur coordonnées, et une liste d'éléments définis chacun par 4 numéros représentant les 4 noeuds sommets, voir par exemple la figure 4.12.

Comptes tenu des conditions aux limites, nous établissons plusieurs listes de noeuds correspondants :

On notera

- $L1$ = la liste des noeuds appartenant à la frontière Γ_1 ,
- $L2$ = la liste des noeuds appartenant à la frontière Γ_2 ,
- $L3$ = la liste des noeuds n'appartenant pas à la frontière.

4.4.2 Interpolation linéaire sur un quadrangle

On choisit de chercher une approximation de la solution de (4.8) par la méthode des éléments-finis avec une interpolation linéaire, engendré par $1, x, y, xy$, sur un **maillage quadrangulaire**.

Soit une décomposition ou maillage quadrangulaire de $\Omega = \bigcup_k E_k$ où les éléments E_k sont tous des quadrangles, n_e désigne le nombre d'éléments du maillage et n le nombre de noeuds. On dit interpolation linéaire, bien que qu'ils'agisse de polynômes de degré 2, car nous verrons que les fonctions de bases sont choisies linéaires aux arêtes.

On désigne les noeuds du maillage par N_j , avec $j = 1, 2, \dots, n$, ou plus simplement par leur numéro. Soit Φ_i la fonction P^2 définie sur Ω , combinaison linéaire de $1, x, y, xy$ sur chacun des éléments E_k et telle que

$$\Phi_i(N_j) = \delta_{ij}, \quad (4.9)$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker. Il est clair que sur chaque élément E_k , les fonctions Φ_j sont uniquement définies par (4.9).

On remarque plusieurs propriétés importantes :

- Une fonction Φ_i est nulle sur chaque élément de la décomposition (ou maillage) sauf sur les éléments dont le noeud N_j est un des quatres sommets.
- Les fonctions Φ_i sont des fonctions affines le long des arêtes des éléments.
- Les fonctions Φ_i sont continues sur tout Ω , mais leur dérivées sont discontinues aux arêtes.
- les fonctions Φ_i forment une partition de l'unité :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \Phi_i = 1 \quad \text{sur } \Omega.$$

On désigne par V^h l'espace vectoriel engendré par les fonctions Φ_i . Il est clair que $V^h \subset H^1(\Omega)$ et que V^h est de dimension n .

Toute fonction $v^* \in V^h$ se décompose alors de façon unique dans la base des Φ_i :

$$v^* = v_i^* \Phi_i,$$

On note de façon vectorielle :

$$[v^*] = \hat{\Phi}^T \hat{v}^*,$$

où

$$\hat{v}^* = \begin{bmatrix} v_1^* & \dots & v_i^* & \dots & v_n^* \end{bmatrix}^\top,$$

$$\hat{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \dots & \Phi_i & \dots & \Phi_n \end{bmatrix}^\top.$$

On note également

$$V_{adm}^h = V_{adm} \cap V^h, \quad V_0^h = V_0 \cap V^h,$$

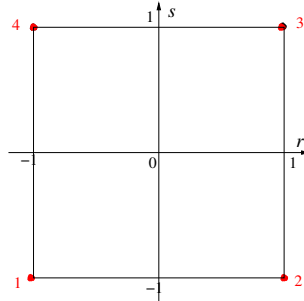
autrement dit :

$$V_{adm}^h = \{v^* \in V^h \text{ tel que } v_i^* = u^{\Gamma_1}(N_i)\}$$

$$= \{v^* \in V^h \text{ tel que } C\hat{v}^* = \hat{u}^{\Gamma_1}\}.$$

4.4.3 Élément de référence et formule de Jacobi

Contrairement au cas des éléments triangulaires à trois noeuds, les fonctions Φ_i sont déterminés à partir de leur définition, notée ϕ , sur un élément de référence, ce qui reflète la pratique habituelle avec la méthode des éléments finis



$$\phi_1 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \quad \phi_3 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \quad \phi_4 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$$

Pour une fonction f définie sur E_l , on a :

$$f_\alpha(x, y) = f_i\Phi_i(x, y) + f_j\Phi_j(x, y) + f_k\Phi_k(x, y) + f_m\Phi_m(x, y)$$

$$= f_i\phi_1(r, s) + f_j\phi_2(r, s) + f_k\phi_3(r, s) + f_m\phi_4(r, s)$$

où f_i, f_j, f_k, f_m désignent respectivement les valeurs de f aux noeuds N_i, N_j, N_k, N_m .

De même, pour un quadrangle E_l défini par quatre noeuds sommets N_i, N_j, N_k, N_m , on définit le changement de variable par l'application T :

$$T(r, s) = \begin{cases} x = x_i\phi_1(r, s) + x_j\phi_2(r, s) + x_k\phi_3(r, s) + x_m\phi_4(r, s) \\ y = y_i\phi_1(r, s) + y_j\phi_2(r, s) + y_k\phi_3(r, s) + y_m\phi_4(r, s) \end{cases}$$

Remarque 4.4.2. *Il est important de souligner que dans cet exemple, ainsi que dans le cas d'une interpolation linéaire pour un maillage en triangle à trois noeuds, les mêmes fonctions d'interpolations Φ_i sont utilisées pour représenter une approximation de la solution cherchée et pour représenter la géométrie du maillage. On dit que ce sont des éléments **isoparamétriques**.*

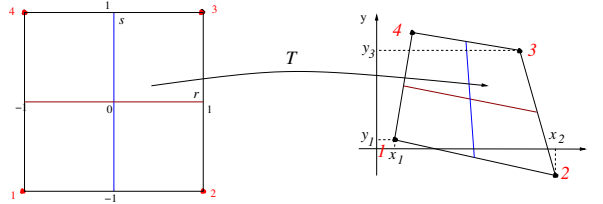


FIGURE 4.11 – T relie un élément quelconque à l'élément de référence

Rappelons la formule de changement de variable (formule de Jacobi) pour le calcul d'une intégrale :

$$\int_{E=T(E_r)} f(r, s) dx dy = \int_{E_r} f(r, s) |\det J_T| dr ds$$

où J_T est la matrice Jacobienne du changement de variable

$$J_T = \begin{bmatrix} x, r & y, r \\ x, s & y, s \end{bmatrix}$$

On remarque que

$$J_T = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{,r}^T \hat{x} & \hat{\phi}_{,r}^T \hat{y} \\ \hat{\phi}_{,s}^T \hat{x} & \hat{\phi}_{,s}^T \hat{y} \end{bmatrix},$$

où on a désigné

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \\ x_l \end{bmatrix}, \quad \hat{y} = \begin{bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \\ y_l \end{bmatrix}, \quad \hat{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix},$$

Dans un problème scalaire la numérotation des noeuds et des ddl coïncident.

Le gradient de la fonction scalaire u est représenté sous la forme d'un vecteur :

$$[\nabla(u)] = \begin{bmatrix} u,1 \\ u,2 \end{bmatrix}$$

Sur un élément quadrangulaire E_l dont les sommets sont les noeuds N_i, N_j, N_k, N_m seuls les quatres fonctions $\Phi_i, \Phi_j, \Phi_k, \Phi_m$ de V^h sont non nuls, si bien que dans E_l :

$$\begin{aligned} [u] &= [\Phi_i \quad \Phi_j \quad \Phi_k \quad \Phi_m] \hat{u} \\ &= [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4] \hat{u} \end{aligned}$$

où on note dans E_l :

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} u^i \\ u^j \\ u^k \\ u^m \end{bmatrix}$$

On a

$$[\nabla_{r,s}(u)] = B_r \hat{u}$$

avec

$$B_{rs} = \begin{bmatrix} \phi_{1,r} & \phi_{2,r} & \phi_{3,r} & \phi_{4,r} \\ \phi_{1,s} & \phi_{2,s} & \phi_{3,s} & \phi_{4,s} \end{bmatrix}$$

On montre facilement que

$$[\nabla_{r,s}(u)] = J_T [\nabla_{x,y}(u)].$$

Si on note la matrice B telle que

$$[\nabla_{x,y}(u)] = B \hat{u}.$$

on a alors

$$B = [J_T]^{-1} B_r.$$

La matrice (de rigidité) élémentaire K_l telle que pour tout u et u^* de V^h , on ait

$$\int_{E_l} \nabla(u) \cdot \nabla(u^*) = \hat{u}' K_l \hat{u}^*$$

est alors donné par

$$K_l = \int_{E_R} B' B |\det J_T|.$$

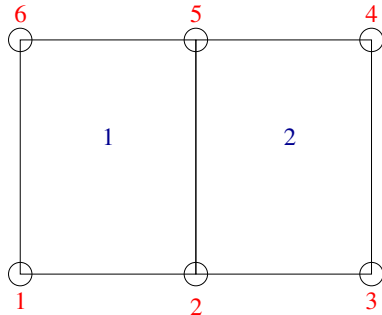
On utilisera une intégration numérique de Gauss à 4 noeuds, voir Annexe 6.4.3

Exercice : Verifier que

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_{,r}^\top &= [s-1 \quad 1-s \quad 1+s \quad -(1+s)], \\ \widehat{\phi}_{,s}^\top &= [r-1 \quad -(1+r) \quad 1+r \quad 1-r]. \end{aligned}$$

Exercice : Déterminer le vecteur L_l tel que

$$\int_{E_l} f u^* = L_l' \hat{u}^*$$



Élément	nœuds
1	1,2,5,6
2	2,3,4,5

FIGURE 4.12 – Un maillage quadrangulaire en 2 éléments et 6 nœuds et le tableau de correspondance éléments/nœuds

4.5 Exemple 3D : Mécanique des milieux continus

On considère un problème général de la mécanique des milieux continus sous sa forme variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in V_{adm} \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon}(u^* - \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u}^* \in V_{adm} \end{array} \right. \quad (4.10)$$

où

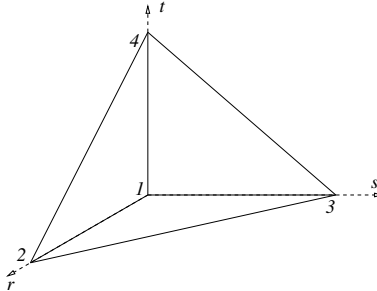
$$V_{adm} = \{\mathbf{u}^* \in [H^1(\Omega)]^3 / \mathbf{u}|_{\Gamma} = \mathbf{u}_0\}$$

et $\bar{\sigma}$ est le tenseur des contraintes lié au tenseur des déformations $\bar{\varepsilon}$ par la loi de comportement qu'on écrit sous forme matricielle pour des raisons informatiques :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ & 1-\nu & \nu & & & \\ & & 1-\nu & & & \\ & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) & & \\ & & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) & \\ & & & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{12} \\ 2e_{23} \\ 2e_{31} \end{bmatrix}$$

4.5.1 Élément tétraédrique à 4 nœuds

On considère l'élément de référence : un tétraèdre à quatre nœuds dont les coordonnées sont $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$.



Sur cet élément de référence, nous définissons les 4 fonctions de base :

$$\phi_1 = 1 - (r + s + t)$$

$$\phi_2 = r$$

$$\phi_3 = s$$

$$\phi_4 = t$$

Si on considère un élément tétraédrique arbitraire dont les sommets sont de coordonnées (x_i, y_i, z_i) , tout point de l'élément peut être défini par le paramétrage

$$\begin{bmatrix} x(r, s, t) \\ y(r, s, t) \\ z(r, s, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_i(r, s, t)x_i \\ \phi_i(r, s, t)y_i \\ \phi_i(r, s, t)z_i \end{bmatrix} = T(r, s, t)$$

T est le difféomorphisme qui envoie l'élément de référence à l'élément considéré. Nous avons la formule de Jacobi (changement de variable) :

$$\int_{E_{reel}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{E_{ref}} f(x, y, z) |\det J_T| dr ds dt$$

où J_T est la jacobienne de T :

$$J_T = \begin{bmatrix} x_{,r} & y_{,r} & z_{,r} \\ x_{,s} & y_{,s} & z_{,s} \\ x_{,t} & y_{,t} & z_{,t} \end{bmatrix}$$

En notant

$$\hat{\phi}^T = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4],$$

on a

$$J_T = \begin{bmatrix} \hat{x}^\top \\ \hat{y}^\top \\ \hat{z}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{,r} & \hat{\phi}_{,s} & \hat{\phi}_{,t} \end{bmatrix}$$

soit

$$J_T = \begin{bmatrix} \hat{x}^\top \\ \hat{y}^\top \\ \hat{z}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs on a

$$f_{,r} = x_{,r}f_{,x} + y_{,r}f_{,y} + z_{,r}f_{,z}$$

$$f_{,s} = x_{,s}f_{,x} + y_{,s}f_{,y} + z_{,s}f_{,z}$$

$$f_{,t} = x_{,t}f_{,x} + y_{,t}f_{,y} + z_{,t}f_{,z}$$

c'est à dire :

$$\nabla_{r,s,t} f = J_T^\top \nabla_{x,y,z} f,$$

ou encore

$$\nabla_{x,y,z} f = J_T^\top \nabla_{r,s,t} f =,$$

Notons

$$\nabla_{x,y,z} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{x,y} \\ u_{x,z} \\ u_{y,x} \\ u_{y,y} \\ u_{y,z} \\ u_{z,x} \\ u_{z,y} \\ u_{z,z} \end{bmatrix} \text{ et } \nabla_{r,s,t} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{x,r} \\ u_{x,s} \\ u_{x,t} \\ u_{y,r} \\ u_{y,s} \\ u_{y,t} \\ u_{z,r} \\ u_{z,s} \\ u_{z,t} \end{bmatrix} = B_r \hat{u}$$

avec

$$B_r = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On a donc,

$$\nabla_{x,y,z} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} J_T^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & J_T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & J_T^{-1} \end{bmatrix} \nabla_{r,s,t} \mathbf{u}$$

$$\hat{\varepsilon}_{x,y,z} = \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ u_{z,z} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \\ u_{y,z} + u_{z,y} \\ u_{x,z} + u_{z,x} \end{bmatrix} = B_E \nabla_{x,y,z} \mathbf{u}$$

with

$$B_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, nous avons

$$\hat{\varepsilon}_{x,y,z} = B \hat{u}$$

avec

$$B = B_E * \begin{bmatrix} J_T^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & J_T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & J_T^{-1} \end{bmatrix} * B_r$$

on a

$$J_T^{-1} \dagger [$$

4.5.2 Élément prisme à 6 noeuds

On considère l'élément de référence dont les coordonnées sont $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,0,1),(0,1,1)$. Sur cet élément de référence, nous définissons les 6 fonctions de base :

$$\phi_1 = (1 - r - s)(1 - t)$$

$$\phi_2 = r(1 - t)$$

$$\phi_3 = s(1 - t)$$

$$\phi_4 = (1 - r - s)t$$

$$\phi_5 = rt$$

$$\phi_6 = st$$

Si on considère un élément prisme arbitraire dont les sommets sont de coordonnées (x_i, y_i, z_i) , tout point de l'élément peut être défini par le paramétrage

$$\begin{bmatrix} x(r, s, t) \\ y(r, s, t) \\ z(r, s, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_i(r, s, t)x_i \\ \phi_i(r, s, t)y_i \\ \phi_i(r, s, t)z_i \end{bmatrix} = T(r, s, t)$$

T est le difféomorphisme qui envoie l'élément de référence à l'élément considéré. Nous avons la formule de Jacobi (changement de variable) :

$$\int_{E_{reel}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{E_{ref}} f(x, y, z) |\det J_T| dr ds dt$$

où J_T est la jacobienne de T :

$$J_T = \begin{bmatrix} x_{,r} & y_{,r} & z_{,r} \\ x_{,s} & y_{,s} & z_{,s} \\ x_{,t} & y_{,t} & z_{,t} \end{bmatrix}$$

En notant

$$\hat{\phi}^\top = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4 \quad \phi_5 \quad \phi_6],$$

on a

$$J_T = \begin{bmatrix} \hat{x}^\top \\ \hat{y}^\top \\ \hat{z}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{,r} & \hat{\phi}_{,s} & \hat{\phi}_{,t} \end{bmatrix}$$

soit

$$J_T = \begin{bmatrix} \hat{x}^\top \\ \hat{y}^\top \\ \hat{z}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs on a

$$f_{,r} = x_{,r}f_{,x} + y_{,r}f_{,y} + z_{,r}f_{,z}$$

$$f_{,s} = x_{,s}f_{,x} + y_{,s}f_{,y} + z_{,s}f_{,z}$$

$$f_{,t} = x_{,t}f_{,x} + y_{,t}f_{,y} + z_{,t}f_{,z}$$

c'est à dire :

$$\nabla_{r,s,t} f = J_T^\top \nabla_{x,y,z} f,$$

ou encore

$$\nabla_{x,y,z} f = J_T^\top \nabla_{r,s,t} f =,$$

Notons

$$\nabla_{x,y,z} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{x,y} \\ u_{x,z} \\ u_{y,x} \\ u_{y,y} \\ u_{y,z} \\ u_{z,x} \\ u_{z,y} \\ u_{z,z} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla_{r,s,t} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{x,r} \\ u_{x,s} \\ u_{x,t} \\ u_{y,r} \\ u_{y,s} \\ u_{y,t} \\ u_{z,r} \\ u_{z,s} \\ u_{z,t} \end{bmatrix} = B_r \hat{\mathbf{u}}$$

On a donc,

$$\nabla_{x,y,z} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} J_T^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & J_T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & J_T^{-1} \end{bmatrix} \nabla_{r,s,t} \mathbf{u}$$

$$\hat{\varepsilon}_{x,y,z} = \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ u_{z,z} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \\ u_{y,z} + u_{z,y} \\ u_{x,z} + u_{z,x} \end{bmatrix} = B_E \nabla_{x,y,z} \mathbf{u}$$

Ainsi, nous avons

$$\hat{\varepsilon}_{x,y,z} = B \hat{\mathbf{u}}$$

avec

$$B = B_E * \begin{bmatrix} J_T^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & J_T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & J_T^{-1} \end{bmatrix} * B_r$$

on a

$$J_T^{-1} \nabla [$$

4.5.3 Élément cubique à 8 nœuds

Pour un cube à 8 nœuds, on fait pareil on définit les huit fonctions dans un élément de référence $[0, 1]^3$:

$$\phi_1 = (1-r)(1-s)(1-t)$$

$$\phi_2 = r(1-s)(1-t)$$

$$\phi_3 = rs(1-t)$$

$$\phi_4 = (1-r)s(1-t)$$

$$\phi_5 = (1-r)(1-s)t$$

$$\phi_6 = r(1-s)t$$

$$\phi_7 = rst$$

$$\phi_8 = (1-r)st$$

on a

$$\hat{\phi}_{,r} = \begin{bmatrix} (s-1)(1-t) & (1-s)(1-t) & s(1-t) & s(t-1) & (s-1)t & (1-s)t & st & -st \end{bmatrix}$$

$$\hat{\phi}_{,s} = \begin{bmatrix} (r-1)(1-t) & r(t-1) & r(1-t) & (1-r)(1-t) & (r-1)t & -rt & rt & (1-r)t \end{bmatrix}$$

$$\hat{\phi}_{,s} = \begin{bmatrix} (r-1)(1-s) & r(s-1) & -rs & (r-1)s & (1-r)(1-s) & r(1-s) & rs & (1-r)s \end{bmatrix}$$

CHAPITRE 5

Exemples non-isoparamétrique

5.1 Poutre en flexion, interpolation P^3 sur maillage SEG2

On considère le problème des poutre en flexion, sous l'action normale d'une densité linéique f , encastrée à une extrémité, libre à l'autre.

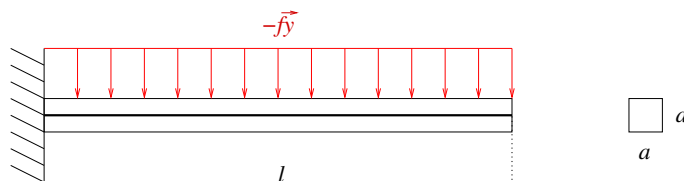


FIGURE 5.1 – Poutre encastré à une extrémité soumise à une force normale.

5.1.1 Le modèle de Bernouilli

Selon le modèle de Bernouilli l'équilibre d'un tel système s'écrit

$$T' + f = 0$$

$$M' + T = 0$$

où T désigne l'effort tranchant, M le moment de flexion relié à un déplacement normal v (flèche) via la loi de comportement, pour une poutre en flexion homogène isotrope de module d'Young E

et de moment quadratique d'inertie I :

$$\begin{aligned} w' &= \frac{M}{EI} \\ v' &= w \end{aligned}$$

v est la flèche ou déplacement normal, w est la rotation.

Les conditions aux limites s'écrivent à l'extrémité encastrée

$$v(0) = 0, \quad w(0) = 0$$

et à l'extrémité libre :

$$T(l) = 0, \quad M(l) = 0.$$

Il est possible de réécrire tout le problème sous la forme d'un problème différentiel aux limites d'ordre 4 en v :

$$\begin{aligned} (EIv'')'' &= f \quad [0, l] \\ v(0) &= 0 \\ v'(0) &= 0 \\ v''(l) &= 0 \\ v'''(l) &= 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

5.1.2 Principe des travaux virtuels

Exercice :

1. Montrer qu'une solution du problème au limite (5.1) est également une solution de la formulation variationnelle (5.2), Cette formulation s'interprète également comme le principe des travaux virtuels.
2. Montrer que (5.2) possède une solution unique.

$$\begin{cases} \text{Trouver } v \in V_{adm} \text{ tel que} \\ a_f(v, v^*) = L(v^*) \quad \forall v^* \in V_{adm} \end{cases} \tag{5.2}$$

où

$$V_{adm} = \{u \in H^2([0, l]) / u(0) = u'(0) = 0\},$$

et avec la forme bilinéaire d'énergie de déformation en flexion a_f

$$a_f(v, v^*) = \int_{[0, l]} EIv''v''^*, \quad \text{et} \quad L(v^*) = \int_{[0, l]} fv^*.$$

5.1.3 Maillage SEG2 et Interpolation P^3

Comme dans dans l'exemple 4.1, nous considérons un maillage SEG2 de l'intervalle $[0, l]$, *i.e.* une subdivision en $n - 1$ segments :

$$[0, l] = \bigcup_i^{n-1} E_i, \quad E_i = [x_i, x_{i+1}]$$

avec les nœuds

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = l.$$

Associé à le type de maillage, il est possible de définir une interpolation plus riche qu'une interpolation P^1 . On définit le sous-espace discrétisé :

$$V^n = \{v \in H^1 / v|_{E_i} \text{ est polynomial de degré 3 sur } E_i, \quad i = 1, \dots, n - 1\}.$$

dont on définit une base avec deux familles de fonctions polynomiales de degré 3 sur chaque éléments E_i et qu'on définit par :

$$\begin{aligned} \phi_i(x_j) &= \delta_{i,j}, & \phi_i'(x_j) &= 0, \\ \psi_i(x_j) &= 0, & \psi_i'(x_j) &= \delta_{i,j}. \end{aligned} \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n - 1\} \quad (5.3)$$

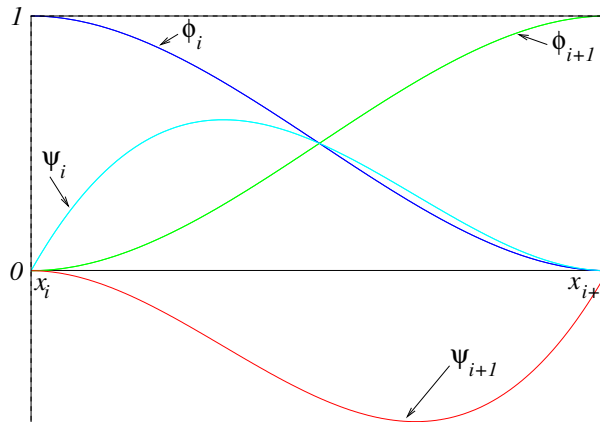


FIGURE 5.2 – Fonctions d'interpolation P^3 définies par (5.3).

Les conditions (5.3) sont suffisantes pour déterminer les fonctions ϕ et ψ sur chaque élément E_i .

Exercice : Montrer que sur $E_i = [x_i, x_{i+1}]$ et $h = x_{i+1} - x_i$, on a

$$\begin{aligned}\phi_i(x) &= \frac{1}{h^3}(x - x_{i+1})^2(2x + x_{i+1} - 3x_i) & \psi_i(x) &= \frac{1}{h^2}(x - x_i)(x - x_{i+1})^2 \\ \phi_{i+1}(x) &= \frac{1}{h^3}(x - x_i)^2(3x_{i+1} - x_i - 2x) & \psi_{i+1}(x) &= \frac{1}{h^2}(x - x_i)^2(x - x_{i+1}).\end{aligned}$$

Soit $v \in V^n$, on peut le décomposer dans cette base :

$$v(x) = v_i \phi_i(x) + w_i \psi_i(x).$$

Comme dans le cas précédent, cette base est très pratique : les composantes v_i et w_i représentent respectivement la valeur de v et la valeur de v' au nœud x_i . Nous notons que pour chaque nœud x_i , il est défini deux *degrés de liberté* v_i et w_i . Ainsi, si la discrétisation est définie par n nœuds, alors il y aura $2n$ degrés de liberté.

On note de façon matricielle

$$v(x) = \begin{bmatrix} \phi_1 & \psi_1 & \dots & \phi_n & \psi_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}}_{\hat{v}},$$

alors on a

$$v'' = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1'' & \psi_1'' & \dots & \phi_n'' & \psi_n'' \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}}_{\hat{v}}.$$

Remarque 5.1.1. Si nous avons choisi une interpolation P^1 , alors le problème de Galerkin associé donne simplement un problème nul, puisque la dérivée seconde d'une fonction linéaire par morceaux est nulle sur chaque morceau. D'un point de vue plus théorique, les fonctions polynomiales de degré 1 par morceaux n'appartiennent pas en général à l'espace H^2 , qui contient l'espace des fonctions de classe C^1 .

5.1.4 Calcul de la matrice rigidité à la flexion

On procède toujours par assemblage, puisque sur un élément E_i toutes les fonctions d'interpolations sont nulles sauf quatre : ϕ_i , ϕ_{i+1} , ψ_i et ψ_{i+1} .

On calcule donc les matrices élémentaires de façon exacte :

$$K_i = \int_{E_i} EIB' * B = \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 12 & -6h & -12 & -6h \\ -6h & 4h^2 & 6h & 2h^2 \\ -12 & 6h & 12 & 6h \\ -6h & 2h^2 & 6h & 4h^2 \end{bmatrix}$$

Exercice : Calculer par assemblage la matrice de rigidité d'une poutre discrétisée en 3 éléments de longueurs égales. Appliquer au cas d'une densité de force linéique uniforme.

5.2 Element MITC4 pour les plaques en flexion

Soit un problème de plaque en flexion dont les déplacements sont donnés par

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -z\beta_x \\ -z\beta_y \\ w \end{bmatrix}$$

les déformations en flexions sont caractérisés par le tenseur

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,x} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{bmatrix}$$

et le cisaillement est défini par

$$\begin{bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{,x} - \beta_x \\ w_{,y} - \beta_y \end{bmatrix}$$

Pour un matériau homogène et isotrope cela correspond à des contraintes

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{-zE}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,x} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} w_{,x} - \beta_x \\ w_{,y} - \beta_y \end{bmatrix}$$

Considérons un quadrangle quelconque :

Nous définissons la famille de fonctions d'interpolation polynomiale de degré 2 telle que

$$\phi_i(j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

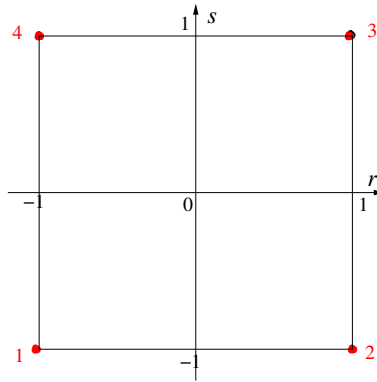


FIGURE 5.3 –

soit

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{1}{4}(r-1)(s-1) \\
 \phi_2 &= \frac{1}{4}(r+1)(1-s) \\
 \phi_3 &= \frac{1}{4}(r+1)(s+1) \\
 \phi_4 &= \frac{1}{4}(1-r)(s+1)
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

si bien qu'on peut définir un point de la plaque sur la base de ce quadrangle par

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \phi_i(r, s)x_i \\ \phi_i(r, s)y_i \\ z \end{bmatrix}$$

Sur un quadrangle quelconque, définissons la base covariante

$$\mathbf{g}_r = \mathbf{x}_{,r}$$

$$\mathbf{g}_s = \mathbf{x}_{,s}$$

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{x}_{,z}$$

On définit la base contravariante (duale) \mathbf{g}^j :

$$\mathbf{g}_i \mathbf{g}^j = \delta_i^j \quad i, j = r, s, 3.$$

On définit alors les composantes covariantes du tenseur de déformation

$$\begin{aligned}\gamma_{x3} &= \gamma_{rz}(\mathbf{g}^r \cdot \mathbf{e}_x)(\mathbf{g}^z \cdot \mathbf{e}_z) + \gamma_{sz}(\mathbf{g}^s \cdot \mathbf{e}_x)(\mathbf{g}^z \cdot \mathbf{e}_z) \\ \gamma_{y3} &= \gamma_{rz}(\mathbf{g}^r \cdot \mathbf{e}_y)(\mathbf{g}^z \cdot \mathbf{e}_z) + \gamma_{sz}(\mathbf{g}^s \cdot \mathbf{e}_y)(\mathbf{g}^z \cdot \mathbf{e}_z)\end{aligned}$$

or puisque $\mathbf{g}_z = \mathbf{e}_z$, on a simplement,

$$\begin{aligned}\gamma_{x3} &= \gamma_{rz}(\mathbf{g}^r \cdot \mathbf{e}_x) + \gamma_{sz}(\mathbf{g}^s \cdot \mathbf{e}_x) \\ \gamma_{y3} &= \gamma_{rz}(\mathbf{g}^r \cdot \mathbf{e}_y) + \gamma_{sz}(\mathbf{g}^s \cdot \mathbf{e}_y)\end{aligned}$$

On définit l'interpolation du tenseur des contraintes de cisaillement sur la base de leur valeur aux nœuds A, B, C, D :

$$\begin{aligned}\gamma_{r3} &= \frac{1}{2}(1+s)\gamma_{r3}^A + \frac{1}{2}(1-s)\gamma_{r3}^C \\ \gamma_{s3} &= \frac{1}{2}(1+r)\gamma_{s3}^D + \frac{1}{2}(1-r)\gamma_{s3}^B\end{aligned}$$

D'après l'interpolation choisie, il vient

$$\begin{aligned}\gamma_{r3}^A &= \frac{1}{2}(w^3 - w^4) + \frac{1}{2}(\beta_x^3 + \beta_x^4)(x_3 - x_4) + \frac{1}{2}(\beta_y^3 + \beta_y^4)(y_3 - y_4) \\ \gamma_{s3}^B &= \frac{1}{2}(w^4 - w^1) + \frac{1}{2}(\beta_x^1 + \beta_x^4)(x_4 - x_1) + \frac{1}{2}(\beta_y^1 + \beta_y^4)(y_4 - y_1) \\ \gamma_{r3}^C &= \frac{1}{2}(w^2 - w^1) + \frac{1}{2}(\beta_x^1 + \beta_x^1)(x_2 - x_1) + \frac{1}{2}(\beta_y^1 + \beta_y^2)(y_2 - y_1) \\ \gamma_{s3}^D &= \frac{1}{2}(w^3 - w^2) + \frac{1}{2}(\beta_x^2 + \beta_x^3)(x_3 - x_2) + \frac{1}{2}(\beta_y^2 + \beta_y^3)(y_3 - y_2)\end{aligned}$$

autrement dit on a

$$\begin{bmatrix} \gamma_{r3}^A \\ \gamma_{s3}^B \\ \gamma_{r3}^C \\ \gamma_{s3}^D \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & -1 & x_3 - x_4 & y_3 - y_4 \\ -1 & x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \\ -1 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 1 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & 1 & x_3 - x_2 & y_2 - y_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_c} \begin{bmatrix} w^1 \\ \beta_x^1 \\ \beta_y^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^4 \\ \beta_x^4 \\ \beta_y^4 \end{bmatrix}$$

Soit au final

$$\begin{bmatrix} \gamma_{x3} \\ \gamma_{y3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{g}^r \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{g}^s \cdot \mathbf{e}_x \\ \mathbf{g}^r \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{g}^s \cdot \mathbf{e}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 & s-1 & 0 \\ 0 & r-1 & 0 & r+1 \end{bmatrix}}_{B_s} B_C \begin{bmatrix} w^1 \\ \beta_x^1 \\ \beta_y^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^4 \\ \beta_x^4 \\ \beta_y^4 \end{bmatrix}$$

CHAPITRE 6

Annexes : Rappels de Mathématiques

Dans cette annexe, nous présentons les outils de calculs de variation et d'optimisation omniprésents dans la pratique des éléments finis.

6.1 Rappels en algèbre linéaire, analyse matricielle

Commençons par un résultat fondamental sur les matrices symétriques

Théorème 6.1.1. *Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice carrée symétrique, $n \times n$, alors il existe une matrice orthogonale U et une matrice diagonale D telles que*

$$A = U^T D U.$$

Autrement dit, les matrices symétriques sont toujours diagonalisables dans une base de vecteurs propres orthonormée.

6.2 Rappels d'optimisation quadratique

Théorème 6.2.1. *(Condition d'optimalité sur un convexe) – Soit J une fonctionnelle deux fois différentiable sur un espace de Banach E . Soit $K \subset E$ un sous-ensemble convexe et fermé sur lequel J est strictement convexe.*

u minimise J sur K si et seulement si

$$(\nabla J(u), u^* - u) \leq 0 \quad \forall u^* \in K.$$

6.3 Théorèmes de projection

Théorème 6.3.1. – (Stampacchia) – Soit H un espace de Hilbert et K un convexe fermé de H , alors $\forall u \in H, \exists ! u_k \in K$ tel que

$$\|u - u^*\|_H \geq \|u - u_k\|_H \quad \forall u^* \in K.$$

De plus, on a

$$(u - u_k, u^* - u_k) \leq 0 \quad \forall u^* \in K.$$

Démonstration. Commençons par montrer l'existence.

Soit

$$d = \inf_{u^* \in K} \|u - u^*\|_H^2,$$

alors il existe une suite $u_n \in K$ telle que

$$\|u - u_n\|_H^2 \leq d + \frac{1}{n}.$$

On va simplement montrer que la suite u_n est de Cauchy. Grâce à l'identité du parallélogramme :

$$(x + y, x + y) + (x - y, x - y) = 2(x, x) + 2(y, y)$$

on écrit :

$$2\|u - u_n\|_H^2 + 2\|u - u_m\|_H^2 = \|u_n - u_m\|_H^2 + \|2u - u_n + u_m\|_H^2.$$

D'où, en reportant :

$$\|u_n - u_m\|_H^2 = 2\|u - u_n\|_H^2 + 2\|u - u_m\|_H^2 - 4\|u - \frac{u_n + u_m}{2}\|_H^2.$$

Comme K est convexe, $(u_n + u_m)/2$ appartient également à K et donc

$$\|u - \frac{u_n + u_m}{2}\|_H^2 \geq d.$$

Ainsi,

$$\|u_n - u_m\|_H^2 \leq 2(d + \frac{1}{n}) + 2(d + \frac{1}{m}) - 4d \leq 2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}),$$

ce qui prouve que la suite u_n est de Cauchy. On en déduit qu'il existe une limite $u_k \in K$ puisque

K est fermé.

Montrons maintenant que la limite u_k est unique : Supposons qu'on ait également u_l tel que

$$\|u - u_k\|_H^2 = \|u - u_l\|_H^2 = d,$$

alors en faisant le même calcul que précédemment, on aurait

$$\|u_k - u_l\|_H^2 \leq 2d + 2d - 4d = 0.$$

□

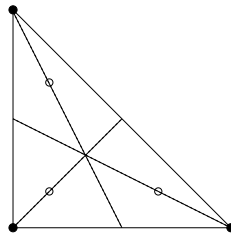
6.4 Intégration numérique de Gauss

Une intégrale est approchée numériquement par une formule de quadrature :

$$\int_{\Omega} f(x) dx \approx \sum_i w_i f(x_i)$$

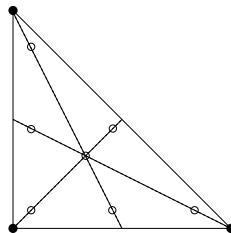
où x_i sont les noeuds d'intégration et w_i sont les poids.

6.4.1 3 noeuds d'intégration de Gauss sur un triangle de référence



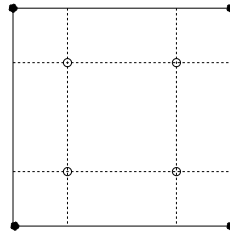
$r_1 = 1/6$	$s_1 = 1/6$	$w_1 = 1/3$
$r_2 = 2/3$	$s_2 = 1/6$	$w_2 = 1/3$
$r_3 = 1/6$	$s_3 = 2/3$	$w_3 = 1/3$

6.4.2 7 noeuds d'intégration de Gauss sur un triangle de référence



$r_1 = 0.1012865073235$	$s_1 = r_1$	$w_1 = 0.1259391605448$
$r_2 = 0.7974269863531$	$s_2 = r_1$	$w_2 = w_1$
$r_3 = r_1$	$s_3 = r_2$	$w_3 = w_1$
$r_4 = 0.4701420641051$	$s_4 = r_6$	$w_4 = 0.1323941527885$
$r_5 = r_4$	$s_5 = r_4$	$w_5 = w_4$
$r_6 = 0.0597158717898$	$s_6 = r_4$	$w_6 = w_4$
$r_7 = 1/3$	$s_7 = r_7$	$w_7 = 0.225$

6.4.3 4 noeuds d'intégration de Gauss sur un quadrangle de référence



$r_1 = -0.577350296189626$	$s_1 = r_1$	$w_1 = 1/4$
$r_2 = r_1$	$s_2 = r_3$	$w_2 = 1/4$
$r_3 = 0.577350296189626$	$s_3 = r_1$	$w_3 = 1/4$
$r_4 = r_3$	$s_4 = r_3$	$w_4 = 1/4$

Bibliographie

- [Bat96] Klaus-Jürgen Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996.
- [Bre80] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Masson, 1980.
- [LM68] Jacques-Louis Lions and Enrico Magenes. *Problèmes aux limites non-homogènes et applications*. Dunod, 1968.
- [ZT00] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The finite element method*. Butterworth Heinemann, fifth edition, 2000.