

# Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6

Spécialité :  
Mécanique

présentée par  
**Daniel Choi**

Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris 6.

Sujet de la thèse :

**SUR LA RIGIDITE GEOMETRIQUE DES SURFACES.  
APPLICATION A LA THEORIE DES COQUES ELASTIQUES MINCES.**

Soutenue le **22 Septembre 1995**

Devant le jury composé de :

M. Roseau	Président
D. Chenais	Rapporteur
A. Cimetière	Rapporteur
J.L. Guermond	Examineur
H. Le Dret	Examineur
A. Raoult	Examineur
E. Sanchez-Palencia	Examineur

# Remerciements

La fin de la rédaction de ce mémoire marque la fin de mes études à l'Université Pierre et Marie CURIE, qui, après neuf années, s'achèvent sur ce titre de Docteur d'Université.

Je dédie affectueusement ce mémoire et ce titre à CAI Zhong Hua, mon grand-père paternel.

Je revois mes parents sagement assis au deuxième rang juste derrière le Jury, le jour de la Soutenance. Je songe alors à la chance que j'ai eue de pouvoir poursuivre, dans de bonnes conditions, d'aussi longues études, avec une pensée particulière pour mon grand frère, à qui je dois énormément.

Je veux exprimer ici mes remerciements les plus vifs à tous les membres du Jury de ma thèse, d'avoir bien voulu examiner mon travail et de m'accorder le titre de Docteur : A Maurice ROSEAU, Professeur à l'Université Pierre et Marie CURIE, membre de l'Académie des Sciences, de m'avoir fait l'honneur de présider le Jury, à Denise CHENAIS, Professeur à l'Université de NICE et à Alain CIMETIERE, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique à POITIERS, de leur bienveillance à mon égard, rédigeant chacun un rapport favorable sur ce mémoire, à Jean-Luc GUERMOND, Chargé de Recherche CNRS au LIMSIS à ORSAY, à Hervé LE DRET, Professeur à l'Université Pierre et Marie CURIE et à Annie ROULT, Professeur à l'Université de GRENOBLE, pour tout l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et dont la lecture minutieuse m'a permis d'apporter les dernières corrections au manuscrit.

A Evariste SANCHEZ-PALENCIA, Directeur de Recherche CNRS à l'Université Pierre et Marie CURIE, mon directeur de thèse, je veux, de plus, exprimer ma profonde reconnaissance. Il m'a fait don d'un très beau sujet, où se croisent géométrie, équations aux dérivées partielles et théorie des coques élastiques minces, sur fond de problèmes numériques. Par petites touches subtiles, il a su m'orienter, m'évitant de probables égarements. Certes, quelquefois, je me suis senti écrasé par un esprit aussi brillant, mais il a toujours su, par son humanité, me redonner courage et motivation.

La thèse a été préparée au sein du Laboratoire de Modélisation en Mécanique. Je voudrais en saluer, ici, tous les membres et personnels dont son directeur Alain RIGOLOTT, et en particulier Jean-Pierre GUIRAUD et Renée GATIGNOL pour leur accueil lors de mon arrivée.

Je salue également Adel BLOUZA, Christian DASCALU, Mihaï GOLOGANU et Olivier RAMOS, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Ils m'ont beaucoup apportés par nos nombreuses discussions.

Je n'oublie pas qu'une grande partie de ce mémoire a été rédigée à la Bibliothèque Inter-Universitaire de Mathématiques-Recherches à Jussieu dont je salue chaleureusement tout le personnel.

Envers tous mes amis Doctorants, mathématiciens et mécaniciens, je suis reconnaissant pour leur soutien et leurs nombreux conseils. Un grand merci, en particulier, à Isabelle DELISEE qui a eu la gentillesse de relire le manuscrit et d'en corriger les nombreuses fautes de frappe...

Je profite de cet espace d'expression libre pour remercier également Olivier BOKANOWSKI, Nicolas BREMAUD, Anne-Charlotte GENILLON, Marion DELAPORTE, Philippe RADI, Laurent KYRIACOPOULOS, Olivier RAMOS, Véronique BUI, Raffi KERVOKIAN, Cédric VINCENT, et Stéphan VINCENT pour le superbe KILIM qu'ils m'ont offert à moi et mon épouse Kae, que j'embrasse au passage, à l'occasion de notre mariage.

**SUR LA RIGIDITE GEOMETRIQUE DES SURFACES.  
APPLICATION A LA THEORIE DES COQUES ELASTIQUES MINCES.**

**Table des matières.**

**Introduction générale. v**

**Chapitre 1. Systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre à deux variables indépendantes. 1** (format pdf [ou au format postscript](#))

1.1.	Problème de Cauchy et Courbes Caractéristiques. Théorèmes d'unicité.	1
	Problème de Cauchy et courbes caractéristiques.	2
	Théorèmes de Holmgren et de Carleman.	6
1.2.	Cas d'un système hyperbolique. Domaine de détermination. Problème de Goursat pour un système de deux équations.	7
	Problème de Cauchy pour un système hyperbolique.	8
	Système hyperbolique de deux équations. Problème de Goursat.	10
1.3.	Equation différentielle du second ordre. Classification usuelle. Cas Elliptique.	15
	Equation caractéristique d'une équation différentielle du second ordre.	15
	Cas d'une équation elliptique. Propriétés de régularité et de trace.	17
	Annexe au chapitre 1.	18

**Chapitre 2. Elements de la théorie locale des surfaces. 19** (format pdf [ou au format postscript](#))

2.1.	Une surface paramétrée dans $\mathbb{R}^3$ . Première et Seconde Formes Fondamentales.	19
	Base Covariante et Base Contravariantes.	19
	Première et seconde Formes Fondamentales.	20
2.2.	Une courbe paramétrée sur une surface.	24
2.3.	Courbure totale et classification des surfaces. Lignes asymptotiques.	26
2.4.	Coordonnées spéciales sur une surface.	32
2.5.	Cas d'une surface réglée.	34

**Chapitre 3. Déplacement inextensionnel d'une surface et champ de rotation infinitésimale associé. L'espace  $R(S)$ . 37** (format pdf [ou au format postscript](#))

3.1.	Déplacement inextensionnel d'une surface. Cas du plan.	37
	Un cas particulier : déplacement inextensionnel d'une portion de plan.	41
3.2.	Le système de flexion en coordonnées locales.	43
	Expression du système de flexion en coordonnées cartésiennes. Le Système non-Kowaleskien et son équation équivalente.	43
	Expression du système de flexion en coordonnées covariantes.	46

Cas d'une surface hyperbolique.	47
Cas d'une surface elliptique.	48
3.3. Régularité d'un déplacement inextensionnel.	50
3.4. Champ de rotation infinitésimale associé à un déplacement inextensionnel. Critère de rigidité.	52
Critères de rigidité d'une surface.	56
3.5. L'espace $R(S)$ des dérivées premières de champs de rotation infinitésimale.	58
Régularité et trace sur une courbe des éléments de l'espace $R(S)$ .	64
3.6. Déplacement inextensionnel d'une surface développable.	66
Cas d'un Cône.	69
3.7. Pseudo-flexions sur une surface. Exemples.	70
Pseudo-flexions d'une surface hyperbolique.	71
Pseudo-flexions d'une surface développable.	73

#### **Chapitre 4. Sur la rigidification des surfaces. 73** (format pdf [ou au format postscript](#))

4.1. Rigidification ou Inhibition d'une surface par des conditions aux limites cinématiques.	73
4.2. Surfaces avec un pli. Condition d'angle fixe.	82
4.3. Exemples de surfaces inhibées et de surfaces non inhibées avec un pli.	90
Cas d'un cône admettant un pli.	90
Cas d'une surface développable admettant un pli.:	93
Cas d'une surface hyperbolique admettant un pli.	95
Cas d'une surface elliptique admettant un pli.	97
4.4. Un cas de rigidité d'une courbe d'un pli non-rectiligne	98
Rigidité d'un pli rectiligne.	98
Un cas de rigidité d'un pli non-rectiligne.	102
4.5. Rigidification de certaines surfaces par deux plis a angle fixe.	105
Cas d'une surface réglée admettant deux plis.	106
Cas d'une surface hyperbolique quelconque admettant deux plis.	110
4.6. Annexe au chapitre 4.	119

#### **Chapitre 5. Application à la théorie des coques élastiques minces. 117** (format pdf [ou au format postscript](#))

5.1. Modèle bidimensionnel linéarisé de coques de W. T. Koiter et sa formulation variationnelle.	117
5.2. Cas des coques à flexion pure non-inhibée.	122
5.3. Cas des coques a flexion pures inhibées. Un exemple de sensibilité.	126
Cas d'une coque bien-inhibée ou coque membranaire.	129
Cas d'une coque mal-inhibée. Un résultat de sensibilité.	131

#### **References bibliographiques.** 137

**SUR LA RIGIDITE GEOMETRIQUE DES SURFACES.  
APPLICATION A LA THEORIE DES COQUES ELASTIQUES MINCES.**

Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie  
Soutenue le 22 Septembre 1995 par Daniel Choi.

INTRODUCTION GENERALE.

Considérons une coque élastique. C'est un corps élastique dont la forme est proche d'une surface avec une épaisseur petite. L'objet de la théorie linéarisée des coques élastiques est d'étudier le comportement, c'est à dire les déformations ou les déplacements, d'une coque élastique sous l'action de forces extérieures, supposée petites ou faibles de sorte que la coque déformée soit proche de son état "naturel", pour que l'étude reste dans un cadre linéarisé. Ce comportement dépend naturellement de la forme de la coque, c'est à dire de la géométrie de la surface (que la coque approche) et de son épaisseur. Une théorie asymptotique des coques élastiques minces consiste à étudier le "comportement limite" lorsque l'épaisseur tend vers zéro, c'est à dire lorsque la coque tend vers une surface. L'étude des coques minces est tout à fait d'actualité, à cause d'une tendance, dans l'industrie moderne, à l'économie et à la performance dans les matériaux utilisés, où l'on vante des structures de plus en plus légères et de plus en plus fines, signe de progrès.

" la statique et la dynamique des coques élastiques minces est - à l'heure actuelle - relativement mal connue et pose des problèmes redoutables et inattendus [...] des difficultés fondamentales apparaissent pour des épaisseurs très petites "(1).

En partant d'un modèle bidimensionnel de coques, celui de W. T. KOITER, ou en partant de l'élasticité tridimensionnelle, E. SANCHEZ-PALENCIA a mis en évidence deux comportements(2) très différents suivant que la surface (limite de la coque) admet ou non des déplacements, dits inextensionnels, laissant la métrique (les longueurs intrinsèques) de la surface invariante au sens linéarisé ; on dira qu'une surface est géométriquement rigide ou inhibée si elle n'admet pas de déplacement inextensionnel.

Cette différence de "comportement limite" a une importance fondamentale dans l'étude des coques minces et met en lumière certaines difficultés rencontrées dans des études numériques. D'une part dans le cas d'une surface non-rigide (dit des coques à flexions pures non-inhibées ou plus simplement des coques en flexion) le comportement limite se situe dans l'espace des déplacements inextensionnels et met ainsi en évidence des situations de grande faiblesse de la structure qui peuvent passer inaperçues par le calcul(3) . Dans le cas d'une surface rigide ou inhibée, il convient de nuancer la rigidité par la notion de surface bien-inhibée et de surface mal inhibée introduite dans [Sanchez-Palencia,89]. Pour une surface bien inhibée(4) le problème limite aboutit à un problème bien posé, c'est le cas des coques membranaires(5). Mais pour une surface mal inhibée, le problème limite peut conduire à des instabilités, une sensibilité exacerbée, ou sensibilité par rapport aux données(6), ce qui implique une impossibilité pratique d'obtenir une étude numérique correcte.

Il est donc essentiel pour qui étudie des coques minces, d'avoir une connaissance théorique de la rigidité (géométrique) de la surface moyenne d'une coque mince. C'est l'objet principal de ce mémoire.

L'admissibilité (l'existence) de déplacements inextensionnels sur une surface dépend de sa géométrie, des conditions aux limites cinématiques (fixation ou encastrement sur une partie du bord), enfin de sa structure, c'est à dire de la présence d'un ou plusieurs plis. On s'en convainc facilement en observant des faits "quotidiens" : en prenant par exemple une feuille (de papier) et en la tenant par un ou deux bouts : la feuille ne "tient" pas, elle a tendance à "tomber" (sous l'action de la pesanteur)

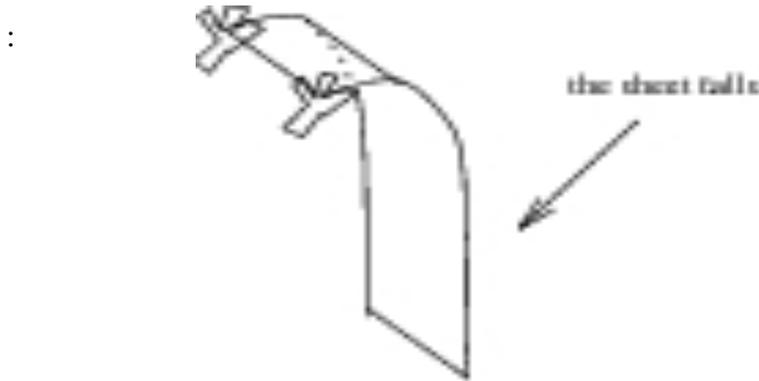


Figure 0.1.

cependant qu'en lui donnant une forme courbe, elle "tient". Elle est comme rigidifiée. C'est ainsi que l'on procède usuellement pour lire un journal (par exemple). Cela met en évidence pour des conditions aux limites similaire, la différence de comportement suivant la géométrie de la coque, voir figure 0.2.



Figure 0.2.

Une autre observation "quotidienne" nous permet de déduire l'effet "rigidifiant" des plis. Prenons une feuille (de papier) pliée en deux. On constate que l'arête de pli est rigide. Prenons encore une cocotte en papier, c'est une feuille de papier pliée en plusieurs endroits convenables. Nous constatons qu'elle est "rigide". D'autres objets usuels avec un pli (qui n'est pas une droite) sont rigides, par exemple un chapeau. Mais il nous faut déjà dans l'exemple de la feuille remarquer différents types de pli. D'une part, pour une feuille légèrement pliée, c'est à dire légèrement "abîmé" ou plutôt "pas

abîmé", l'angle formé par le pli a tendance à rester constant lors d'une déformation, on dira que le pli est à angle fixe. D'autre part si la feuille est très abîmée, comme lorsqu'on "pince" très fort, de sorte que l'angle de pli peut varier sans contrainte, on dira que le pli est à appui simple.

Ces observations heuristiques ne sont pas nouvelles, la théorie des déplacements inextensionnels sur une surface est classique et depuis fort longtemps. On peut en trouver un exposé, réunissant de nombreux travaux effectués sur le sujet, dans "Leçons sur la théorie générale des surfaces" de G. DARBOUX, publié en 1894. Il s'agissait déjà de répondre à des problèmes issus de la déformation des coques. Sur la rigidité d'une surface, la théorie classique concerne les surfaces sans bord tels que les ovoïdes (chacun sait qu'un oeuf est "incassable") et plus généralement les surfaces convexes, pour lesquelles des arguments géométriques de convexité suffisent à montrer la rigidité, nous renvoyons à "Intrinsic geometry of convex surfaces" de I. POGORELOV, voir également [Vekua,59]. En ce qui concerne les surfaces avec bord, d'un point de vue historique, la monographie "Generalised analytic functions" de I. N. VEKUA est fondamentale. Elle contient de nombreux cas de rigidification de surfaces, dont certains pour des surfaces contenant des plis, mettant à profit la théorie des fonctions analytiques généralisées ou pseudo-analytiques. En fait, les effets (sur la rigidité) d'un pli sont moins bien connus que les effets de fixation ou d'encastrement d'une surface sur une partie de son bord, dans sa monographie, VEKUA ne considère essentiellement les surfaces avec plis que dans le cas d'une surface de type elliptique, mettant à profit la théorie des fonctions analytiques généralisées ou pseudo-analytiques(7). Et à notre connaissance, peu ou pas de recherche significative n'avait été effectuée, concernant les cas de surfaces de type hyperbolique avec un ou plusieurs plis.

C'est donc plutôt dans cette direction (surfaces hyperboliques avec un ou plusieurs plis) que nous avons orienté nos recherches et trouvé des cas nouveaux de rigidification (surtout dans le cas de plis à angle fixe), dont un cas curieux de rigidité d'un certain type de pli (théorème 4.4.4) soulignant le rôle particulier en théorie des déplacements inextensionnels que jouent les lignes asymptotiques(8) d'une surface. Nous avons également considéré les cas de surfaces réglées développables dont la forme générale d'un déplacement inextensionnel est connue, et pour lesquelles nous avons des cas nouveaux de rigidification. Les démonstrations, un peu techniques, sont en fait des théorèmes d'unicité de problèmes associés à un système d'équations aux dérivées partielles linéaire du premier ordre, que nous appelons système de flexion, satisfaites par tout déplacement inextensionnel.

La nouveauté (technique) de notre travail par rapport aux références classiques repose sur l'introduction et l'utilisation quasi-systématique dans nos démonstrations d'un espace non-classique - espace introduit par l'auteur dans [Choi,93] - que nous avons noté  $R(S)$ , isomorphe à l'espace des déplacements inextensionnels (modulo les déplacements dits triviaux ou rigides), dérivé de la notion de champs de rotation infinitésimale définis sur  $S$ , qui sont des objets classiques associés aux déplacements inextensionnels. Une propriété fondamentale des éléments de  $R(S)$  est qu'ils sont tangents à la surface. Ce qui permet de "traduire" d'une manière simple dans  $R(S)$  des conditions de plis à angle fixe (proposition 4.2.3) qui sont compliquées lorsqu'on les exprime en terme des composantes covariantes d'un déplacement(9). C'est ce qui va nous permettre d'obtenir des résultats nouveaux de rigidité de certaines surfaces avec des plis.

Ce mémoire, hormis l'introduction, est constitué de cinq chapitres.

Les premier et deuxième chapitres sont consacrés à des rappels concernant les systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) linéaires du premier ordre et la théorie locale des surfaces. Nous y rappelons les notions, fondamentales pour la suite, de courbes caractéristiques d'un système d'équations aux dérivées partielles et des lignes asymptotiques d'une surface, ces deux notions étant étroitement liées dans le cadre des déplacements inextensionnels d'une surface. Ils sont la base technique de tout notre mémoire, il nous a donc semblé indispensable d'en faire un exposé élémentaire. Dans le premier chapitre, consacré aux systèmes linéaires d'EDP(10), nous définissons les classiques problème de Cauchy (définissant la notion de courbes caractéristiques) et problème de Goursat (pour les systèmes hyperboliques). Nous y indiquons, sans démonstration, les théorèmes classiques d'unicité de régularité et de prolongement des solutions d'une EDP. Mais nous démontrons l'existence et l'unicité d'une variante non-classique du problème de Goursat (théorème 1.2.8). Tous les théorèmes d'unicité donnent lieu au quatrième chapitre à des théorèmes de rigidité.

Au deuxième chapitre, nous exposons des éléments de la théorie locale des surfaces(11). Nous y rappelons les définitions des première et seconde formes fondamentales décrivant qualitativement la géométrie de la surface (respectivement les longueurs et les courbures) ; la seconde forme fondamentale définit en particulier, en tout point de la surface, la courbure totale en ce point. Le signe de la courbure totale donne alors la classification usuelle des points d'une surface, cela correspond, en un point d'une surface, à l'existence d'aucune, d'une ou de deux directions asymptotiques (qui annule la seconde forme fondamentale) distinctes. La notion de direction asymptotique définit alors la notion de ligne asymptotique.

Dans le troisième chapitre nous faisons un exposé sur les déplacements inextensionnels d'une surface, explicitant le système de flexion(12). C'est un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre qui a la particularité, en coordonnées cartésiennes, d'être non-Kowaleskien ; de façon classique ce système est "équivalent", dans un certain sens, à une équation différentielle du second ordre dont les courbes caractéristiques sont les lignes asymptotiques de la surface. Nous présentons ensuite, découlant du système de flexion, des propriétés de régularité des déplacements inextensionnels. Puis nous développons la notion de champ de rotation infinitésimale associé à un déplacement inextensionnel, aboutissant à l'espace  $R(S)$  qui s'avérera être la clé de toutes nos démonstrations concernant des cas de rigidification par des plis. Les éléments sont également caractérisés par un système d'équation aux dérivées partielles du premier ordre que nous désignons, par analogie, système de flexion dérivé et dont les propriétés sont naturellement similaires à celles du système de flexion.

Le quatrième chapitre est consacré à la rigidification (géométrique) proprement dite des surfaces. Dans la première section, nous exposons des cas classiques de rigidification par une condition cinématique au bord, telle une fixation. Nous considérons alors, dans la deuxième section, les effets d'un pli - notamment à angle fixe - sur une surface. Nous présentons ensuite divers exemples (dont certains nouveaux) illustrant tous les cas de configurations possibles (inhibée avec un pli, non-inhibée avec un pli). La troisième section est consacrée à la rigidité du cas particulier de pli mentionné plus haut, généralisant en quelque sorte la rigidité des plis droits. Enfin, dans la quatrième section, nous exhibons des exemples (nouveaux) de rigidification des surfaces par deux plis. Nous reprenons les exemples que nous avons montrés dans [Choï et Sanchez-Palencia,93]

dans le cas d'une surface réglée et nous y ajoutons une généralisation du cas réglée non-développable (théorème 4.5.6). C'est à dire que pour une surface hyperbolique générale lorsque les deux plis à angle fixe se rejoignent en un point  $M$ , nous montrons la rigidité au voisinage de  $M$ , pourvu qu'il n'y ait pas de ligne asymptotique issue de  $M$  et séparant les deux plis (hypothèse que nous nommons "condition PLASP").

Le cinquième chapitre est consacré aux applications à la théorie asymptotique des coques minces. Nous y rappelons la formulation variationnelle du modèle bidimensionnel linéarisé de coques de W. T. Koiter et les différents "comportements limites" lorsque l'épaisseur de la coque tend vers zéro, selon que la surface moyenne de la coque est inhibée ou non, bien-inhibée ou non, que nous avons évoqués au début de cette introduction. Nous inscrivons dans ce contexte le résultat de rigidité obtenu, au théorème 4.5.6 où une surface hyperbolique admettant deux plis à angle fixe se rejoignant et satisfaisant à la condition "PLASP" : en supposant que les surfaces adjacentes sont également hyperboliques de telle sorte que l'ensemble soit entièrement inhibé, nous démontrons alors un résultat supplémentaire, dans ce cas la coque est sensitive.

1. (1) Cit. E. Sanchez-Palencia "Surfaces et coques élastiques minces. Nouveaux résultats. Nouveaux problèmes. Nouveaux défis". La vie des sciences, à paraître.
2. (2) Voir [Sanchez-Palencia,89 et 90], voir également [Sanchez-Palencia,92].
3. (3) Voir [Sanchez-Palencia,89] et [Akian et Sanchez-Palencia,92].
4. (4) C'est le cas par exemple d'une surface elliptique fixée sur tout son bord ou encore d'un ovoïde.
5. (5) Voir [Ciarlet et Sanchez-Palencia,93 et 95] ou [Ciarlet et Lods,94].
6. (6) Voir [Lions et Sanchez-Palencia,94 et 95].
7. (7) Concernant la théorie des fonctions analytiques généralisés ou pseudo-analytiques, voir également [Bers,53] et également à [Courant-Hilbert] pour un exposé introductif.
8. (8) Lignes asymptotiques qui n'existent pas dans les cas d'une surface elliptique, voir la définition 2.3.3.
9. (9) Voir l'expression (5.3.26) dans ce mémoire, ou [Niordson,85].
10. (10) Nous renvoyons pour un exposé complet sur la théorie des systèmes linéaires aux dérivées partielles, à "Methods of Mathematical Physics", volume 2 de R. Courant et D. Hilbert. Nous avons également consulté [Chazarain et Piriou,81], [Hadamard,64], [Necas,66] ou encore [Smirnov,64].
11. (11) Nous renvoyons pour un exposé sur la théorie des surfaces à divers manuels tels que [Klingenberg,81], [Spivak,75] ou encore [Stoker,69]. (12) On dit aussi système de rigidité, voir [Geymonat et Sanchez-Palencia,94].

## CHAPITRE 1.

### SYSTEMES D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES LINEAIRES DU PREMIER ORDRE A DEUX VARIABLES INDEPENDANTES.

#### 1.1. PROBLEME DE CAUCHY ET COURBES CARACTERISTIQUES. THEOREMES D'UNICITE.

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbf{R}^2$  avec les paramètres  $y^1$  et  $y^2$ . On désigne par  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  une fonction définie sur  $\Omega$ , à valeur dans  $\mathbf{R}^n$ . On note :

$$\mathbf{u}_{,\alpha} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y^\alpha} = \partial_\alpha \mathbf{u} = (\partial_\alpha u_1, \partial_\alpha u_2, \dots, \partial_\alpha u_n).$$

Soit  $\mathbf{P}$  l'opérateur différentiel du 1<sup>er</sup> ordre :

$$(1.1.1) \quad \mathbf{P}(\mathbf{u}) = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y^1} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y^2},$$

où  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  et  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  sont des matrices  $n \times n$  de fonctions réelles sur  $\Omega$ . Nous noterons dans la suite :

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}) = \mathbf{A} \mathbf{u}_{,1} + \mathbf{B} \mathbf{u}_{,2}.$$

Considérons le système linéaire de  $n$  équations aux dérivées partielles du 1<sup>er</sup> ordre :

$$(1.1.1a) \quad \mathbf{P}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(y^1, y^2, \mathbf{u}) \text{ dans } \Omega,$$

où  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  une fonction définie sur  $\Omega$  et qui peut dépendre de  $\mathbf{u}$ .

Soit  $\Gamma$  une courbe de  $\Omega$ , définie de manière implicite par une fonction réelle  $\phi$  :

$$(1.1.2) \quad \Gamma = \{(y^1, y^2) \in \Omega / \phi(y^1, y^2) = 0\}.$$

On suppose que  $\phi$  est suffisamment régulière et  $\phi_{,1}^2 + \phi_{,2}^2 \neq 0$ , de sorte que  $\Gamma$  est régulière.

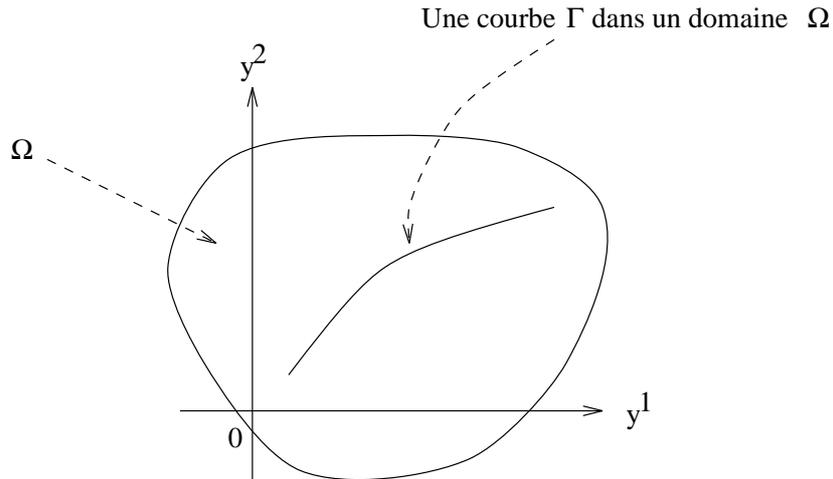


Figure 1.1.1

### PROBLEME DE CAUCHY ET COURBES CARACTERISTIQUES.

Etant donnée une fonction définie sur  $\Gamma$  :  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ , que nous supposons régulière (de classe  $C^1$ ), le **problème de Cauchy** (P) consiste à déterminer une fonction solution de l'équation (1.1.1a) et satisfaisant à la **donnée de Cauchy** :

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi} \quad \text{le long de } \Gamma.$$

**1.1.1. Définition.** - Soit un espace fonctionnel  $V$ . On dit que le problème de Cauchy (P) est **bien posé** dans  $V$  s'il existe une unique solution  $\mathbf{u}$  dans  $V$  au problème (P).

**1.1.2. Remarque.** - La définition 1.1.1 de problème "bien posé" doit être nuancée selon que la dépendance de la solution du problème de Cauchy est *continue* ou non (pour des topologies données) par rapport à la donnée de Cauchy ; dans l'affirmative, on dit que le problème de Cauchy est **bien posé au sens de Hadamard**, voir [Hadamard,64].  $\square$

**1.1.3. Définitions.** - Considérons le problème de Cauchy (P) avec une donnée de Cauchy sur une courbe  $\Gamma$  définie par une fonction  $\phi$  comme en (1.1.2).

La courbe  $\Gamma$  est dite **libre** ou **non-caractéristique** si  $\det(\phi_{,1} \mathbf{A} + \phi_{,2} \mathbf{B}) \neq 0$  partout le long de  $\Gamma$ .

La courbe  $\Gamma$  est dite **caractéristique** si  $\det(\phi_{,1} \mathbf{A} + \phi_{,2} \mathbf{B}) = 0$  partout le long de  $\Gamma$ .

Justifions la dénomination "caractéristique" de la définition 1.1.2. Etant donné  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi}$  sur une courbe  $\Gamma$ , cherchons à déterminer les valeurs de toutes les dérivées partielles premières des inconnues  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  en chaque point de la courbe  $\Gamma$ .

D'une part, le système (1.1.1) donne  $n$  équations. Et d'autre part, en dérivant  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi}$  le long de  $\Gamma$  (c'est-à-dire suivant les directions tangentes<sup>(\*)</sup> le long de  $\Gamma$ ), nous obtenons  $n$  équations supplémentaires :

$$\phi_{,2} \mathbf{u}_{,1} - \phi_{,1} \mathbf{u}_{,2} = \boldsymbol{\psi}'.$$

D'où le système linéaire de  $2n$  équations à  $2n$  inconnues en chaque point de  $\Gamma$  :

$$(1.1.3) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \phi_{,2} \mathbf{I}_n & -\phi_{,1} \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{,1} \\ \mathbf{u}_{,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\boldsymbol{\psi}) \\ \boldsymbol{\psi}' \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que :

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \phi_{,2} \mathbf{I}_n & -\phi_{,1} \mathbf{I}_n \end{pmatrix} = \det(\phi_{,1} \mathbf{A} + \phi_{,2} \mathbf{B}).$$

Ainsi, le système linéaire (1.1.3) est inversible (ou de Cramer) si et seulement si :

$$\det(\phi_{,1} \mathbf{A} + \phi_{,2} \mathbf{B}) \neq 0 \text{ le long de } \Gamma,$$

c'est à dire si  $\Gamma$  est non-caractéristique.

Dans le cas contraire, si la courbe  $\Gamma$  est caractéristique, la donnée de Cauchy  $\boldsymbol{\psi}$  ne peut pas être quelconque : en tout point de  $\Gamma$ ,  $[\mathbf{f}(\boldsymbol{\psi}), \boldsymbol{\psi}']$  doit appartenir à l'image de l'application linéaire associée à la matrice du système (1.1.3). C'est à dire que la fonction  $\boldsymbol{\psi}$  doit vérifier une certaine équation de compatibilité, mais on obtient alors une infinité de solutions ; sinon, le système (1.1.3) (et donc le problème de Cauchy) ne possède pas de solution. D'où la proposition :

**1.1.4. Proposition.** - *Si la courbe  $\Gamma$  est une courbe caractéristique de (1.1.1), alors le problème de Cauchy (P) n'est pas bien posé.*

---

(\*) Sur  $S$  une hypersurface  $\phi(y^1, \dots, y^n) = 0$ , une direction  $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n)$  est tangente à  $S$  si la dérivée de  $\phi$  dans la direction  $\mathbf{a}$  est nulle :

$$\frac{d}{ds} \phi(y^1 + a^1 s, \dots, y^n + a^n s) = a^1 \phi_{,1} + \dots + a^n \phi_{,n} = 0.$$

**1.1.5. Remarque.** - Etant donné le problème de Cauchy (P), faisons le changement de variable :

$$\begin{aligned}x^1 &= \phi(y^1, y^2), \\x^2 &= \varphi(y^1, y^2),\end{aligned}$$

où  $\phi$  est une fonction quelconque. En posant :

$$\tilde{\mathbf{u}}(x^1, x^2) = \mathbf{u}(y^1, y^2),$$

l'opérateur différentiel  $\mathbf{P}$  devient :

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}) = \tilde{\mathbf{P}}(\tilde{\mathbf{u}}) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{u}}_1 + \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{u}}_2,$$

avec  $\tilde{\mathbf{A}} = [\phi_{,1} \mathbf{A} + \phi_{,2} \mathbf{B}]$  et  $\tilde{\mathbf{B}} = [\varphi_{,1} \mathbf{A} + \varphi_{,2} \mathbf{B}]$ . Si bien que  $\tilde{\mathbf{A}}$  est inversible si la courbe  $\Gamma$  est libre. On peut alors ramener le problème de Cauchy (P) à la configuration suivante :

$$(1.1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{,1} + \mathbf{B} \mathbf{u}_{,2} = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega. \\ \mathbf{u} = \boldsymbol{\psi} \text{ sur } x^1 = 0. \end{array} \right.$$

C'est la configuration usuelle du problème de Cauchy.  $\square$

Reprenons le problème de Cauchy (P). Si la courbe  $\Gamma$  est libre, nous avons vu (dans la proposition 1.1.3) qu'il est possible de déterminer toute les dérivées partielles premières des inconnues  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  le long de  $\Gamma$ . Dans le cas où tous les coefficients et la donnée de Cauchy sont analytiques et si  $\Gamma$  est elle même une courbe analytique<sup>(\*)</sup>, nous pouvons en réitérant le même procédé, déterminer les dérivées partielles des  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  à tous les ordres et en tout point de  $\Gamma$ . La série entière ainsi obtenue en chaque point de  $\Gamma$  est convergente dans un voisinage du point de  $\Gamma$  considéré<sup>(\*\*)</sup> :

**1.1.6. Théorème (Cauchy-Kowaleska).** - *Etant donné le système (1.1.1) avec tous ses coefficients analytiques et une courbe analytique  $\Gamma$  libre pour (1.1.1). Pour toute*

---

<sup>(\*)</sup> C'est à dire que la courbe  $\Gamma$  peut être définie par un paramétrage analytique. Si bien que le problème de Cauchy (P) peut se ramener dans la configuration (1.1.4) avec des coefficients analytiques.

<sup>(\*\*)</sup> Nous renvoyons pour une démonstration du théorème de Cauchy-Kowaleska à divers manuels tels que [Courant et Hilbert] ou [Chazarain et Piriou,81].

donnée de Cauchy analytique, il existe un voisinage de  $\Gamma$  où il existe une unique solution analytique au problème de Cauchy (P).

Nous voyons ainsi le rôle fondamental que joue une courbe caractéristique pour le problème de Cauchy. C'est de plus une notion qui ne dépend pas du choix des paramètres :

**1.1.7. Proposition.** Soit  $\mathbf{P}$  l'opérateur différentiel du 1<sup>er</sup> ordre défini comme en (1.1.1), alors les courbes caractéristiques de  $\mathbf{P}$  sont invariantes par changement de variables.

*Preuve :* Soit  $x^1 = x^1(y^1, y^2)$  et  $x^2 = x^2(y^1, y^2)$  un changement de variable et  $\Gamma$  une courbe caractéristique de  $\mathbf{P}$ .  $\Gamma$  est décrite par  $\tilde{\phi}(x^1, x^2) = \phi(y^1, y^2) = 0$ . En posant :

$$\tilde{\mathbf{u}}(x^1, x^2) = \mathbf{u}(y^1, y^2),$$

l'opérateur  $\mathbf{P}$  se réécrit dans les nouvelles variables :

$$\tilde{\mathbf{P}}(\tilde{\mathbf{u}}) = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{u}}_{,1} + \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{u}}_{,2}$$

$$\text{avec } \tilde{\mathbf{A}} = \left[ \frac{\partial x^1}{\partial y^1} \mathbf{A} + \frac{\partial x^1}{\partial y^2} \mathbf{B} \right] \text{ et } \tilde{\mathbf{B}} = \left[ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} \mathbf{A} + \frac{\partial x^2}{\partial y^2} \mathbf{B} \right].$$

Ainsi,  $\Gamma$  est une courbe caractéristique pour  $\tilde{\mathbf{P}}$  si  $\det(\tilde{\phi}_{,1} \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\phi}_{,2} \tilde{\mathbf{B}}) = 0$ . Développons :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{,1} \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\phi}_{,2} \tilde{\mathbf{B}} &= \tilde{\phi}_{,1} \left[ \frac{\partial x^1}{\partial y^1} \mathbf{A} + \frac{\partial x^1}{\partial y^2} \mathbf{B} \right] + \tilde{\phi}_{,2} \left[ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} \mathbf{A} + \frac{\partial x^2}{\partial y^2} \mathbf{B} \right] \\ &= \left[ \tilde{\phi}_{,1} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} + \tilde{\phi}_{,2} \frac{\partial x^2}{\partial y^1} \right] \mathbf{A} + \left[ \tilde{\phi}_{,1} \frac{\partial x^1}{\partial y^2} + \tilde{\phi}_{,2} \frac{\partial x^2}{\partial y^2} \right] \mathbf{B}, \end{aligned}$$

où nous reconnaissons

$$\phi_{,1} = \left[ \tilde{\phi}_{,1} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} + \tilde{\phi}_{,2} \frac{\partial x^2}{\partial y^1} \right] \text{ et } \phi_{,2} = \left[ \tilde{\phi}_{,1} \frac{\partial x^1}{\partial y^2} + \tilde{\phi}_{,2} \frac{\partial x^2}{\partial y^2} \right].$$

D'où :  $\det(\tilde{\phi}_{,1} \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\phi}_{,2} \tilde{\mathbf{B}}) = \det(\phi_{,1} \mathbf{A} + \phi_{,2} \mathbf{B}) = 0$  sur  $\Gamma$ , C.Q.F.D. ■

**1.1.8. Remarque.** - Dans la configuration du problème de Cauchy (P), il se peut que le  $\det(\phi_{,1} \mathbf{A} + \phi_{,2} \mathbf{B})$  soit nul quelle que soit la fonction  $\phi$ , c'est à dire que toute courbe  $\Gamma$  dans  $\Omega$  est une courbe caractéristique pour le problème de Cauchy (P). Dans ce cas, il n'est pas possible de ramener le problème de Cauchy sous la forme (1.1.4), on dit que le

système est *non-kowaleskien*. C'est un cas pathologique de système linéaire du 1<sup>er</sup> ordre dont la théorie des déformations inextensionnelles d'une surface donne un des premiers exemples historiques, via le système de flexion en coordonnée cartésienne (3.6.2).  $\square$

**1.1.9. Remarque.** - Malgré l'hypothèse très restrictive concernant l'analyticité des coefficients et de la donnée de Cauchy, il n'existe pas d'énoncé plus général au théorème 1.1.6. En effet il existe des exemples de systèmes aux coefficients très réguliers (de classe  $C^\infty$ ) et qui n'admettent aucune solution<sup>(\*)</sup>.  $\square$

A priori, le théorème de Cauchy-Kowaleska n'indique l'unicité que pour des solutions analytiques. L'unicité est en fait plus générale.

#### THEOREMES DE HOLMGREN ET DE CARLEMAN.

Considérons l'opérateur différentiel  $\mathbf{P}$  défini en (1.1.1), nous avons les classiques théorèmes d'unicité :

**1.1.10. Théorème (Holmgren<sup>(\*\*)</sup>).** - Soit  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2$  une solution du problème  $\mathbf{P}(\mathbf{u}) = 0$  où les coefficients de  $\mathbf{P}$  sont analytiques et  $\mathbf{u} = 0$  sur une courbe  $\Gamma$  non-caractéristique de classe  $C^1$ . Alors  $\mathbf{u}$  est identiquement nulle dans un voisinage de chaque point de  $\Gamma$ .

Le théorème est valable pour des systèmes à un nombre de variables quelconque. Cependant, pour un système à deux variables, le théorème de Holmgren a été étendu pour des systèmes à coefficients de classe  $C^2$  et à caractéristiques simples (i.e. la multiplicité des racines de  $\det(\xi_1 \mathbf{A} + \xi_2 \mathbf{B}) = 0$  est 1) par H. CARLEMAN, voir [Carleman,39].

**1.1.11. Théorème (Carleman).** - Soit  $\mathbf{u} \in C^m(\Omega)$ ,  $m \geq 0$ , solution de l'équation (ou système) aux dérivées partielles :  $\mathbf{P}(\mathbf{u}) = 0$ , avec un opérateur différentiel  $\mathbf{P}$ , défini comme en (1.1.1), dont les coefficients sont de classes  $C^2$  et dont les caractéristiques sont simples. Soit  $\Gamma$  une portion de courbe régulière (de classe  $C^2$ ) de  $\Omega$ . Si  $\mathbf{u}$  est nulle sur  $\Gamma$ , alors  $\mathbf{u}$  est identiquement nulle dans un voisinage de chaque point de  $\Gamma$ .

---

(\*) Voir [Hörmander,1960] ou [Lewy,1957] ou encore [Trèves, 1965].

(\*\*) Nous renvoyons à [Courant et Hilbert] et à [Chazarain et Piriou,81] pour un énoncé plus général et une preuve du théorème d'unicité de Holmgren.

Les théorèmes d'unicité précédents sont des énoncés locaux, mais on peut dans certain cas préciser le domaine d'unicité. cela dépendra alors de la nature du système, nous allons préciser cela au cours des deux sections suivantes de ce chapitre.

## 1.2. CAS D'UN SYSTEME HYPERBOLIQUE. DOMAINE DE DETERMINATION. PROBLEME DE GOURSAT POUR UN SYSTEME DE DEUX EQUATIONS.

Soit  $\mathbf{u}$  une fonction définie sur  $\Omega$ , un ouvert connexe de  $\mathbf{R}^2$ . Considérons l'opérateur différentiel du 1<sup>er</sup> ordre  $\mathbf{P}$  comme en (1.1.1) mais en prenant, sans perte de généralité pour la suite,  $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$  :

$$(1.2.1) \quad \mathbf{P}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_{,1} + \mathbf{B} \mathbf{u}_{,2} = \mathbf{f}.$$

Soit  $\Gamma$  une courbe de  $\Omega$  définie de manière implicite par une fonction réelle  $\phi$  comme en (1.1.2). On pourra supposer, sans perte de généralité,  $\phi_{,1} \neq 0$ . En posant

$$(1.2.2) \quad \tau = \phi_{,2} / \phi_{,1},$$

la courbe  $\Gamma$  est une courbe caractéristique de (1.2.1) si :

$$(1.2.3) \quad D(\tau) = \det(\mathbf{B} - \tau \mathbf{I}_n) = 0.$$

$D(\tau)$  étant un polynôme de degré  $n$  en  $\tau$ , il possède au plus  $n$  racines réelles, distinctes ou non.

**1.2.1. Définition.** *Si toutes les racines de  $D(\tau)$  sont réelles, on dit que le système est **hyperbolique** ou à caractéristiques réelles. Si de plus les racines sont 2 à 2 distinctes, on dit que le système (1.2.1) est **strictement hyperbolique**.  $\square$*

A l'opposé, si toutes les racines de  $D(\tau)$  sont complexes, non réelles (cela est possible lorsque  $n$  est pair), on dit alors que le système (1.2.1) est *elliptique*.

### PROBLEME DE CAUCHY POUR UN SYSTEME HYPERBOLIQUE.

*Nous supposons désormais, et pour toute la suite de cette section, que le système différentiel (1.2.1) est hyperbolique. Si de plus le système est strictement hyperbolique alors la matrice  $\mathbf{B}$  est diagonalisable, de sorte que le système (1.2.1) peut être remplacé par un autre, linéairement équivalent (modulo un isomorphisme), avec une matrice  $\mathbf{B}$*

diagonale. Considérons alors le problème de Cauchy avec  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  et  $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$  :

$$(P) \quad \begin{cases} \mathbf{u}_{,1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{,2} = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = \Psi & \text{sur } y^1 = 0. \end{cases}$$

Soit  $P$  un point de coordonnée  $(y_0^1, y_0^2)$ . Traçons les courbes caractéristiques  $C_1, \dots, C_k$  de l'opérateur  $\mathbf{P}$  issues du point  $P$ . Elles coupent l'axe  $y^1 = 0$  aux points  $P_1, \dots, P_k$ .

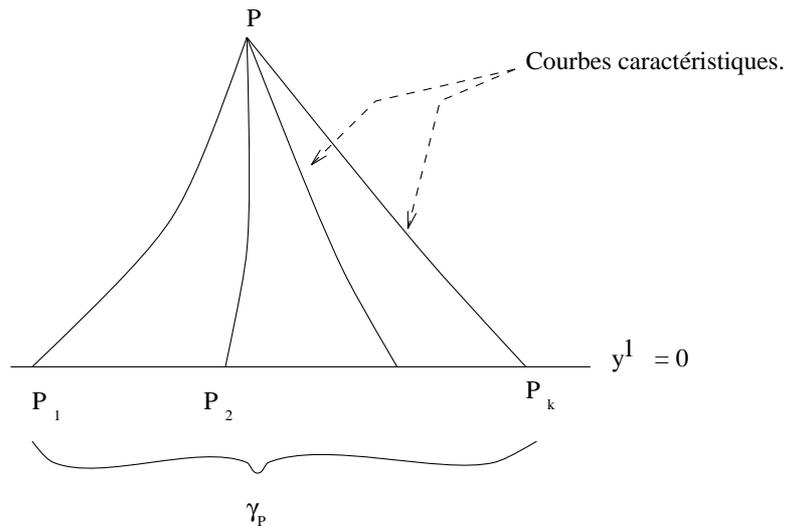


Figure 1.2.1.

**1.2.2. Définition.** - La région délimitée par les points  $P_1, \dots, P_k$  est appelé **domaine de dépendance** du point  $P$ , on le note  $\gamma_P$ .  $\square$

**1.2.3. Définitions.** - Soit  $\sigma$ , un segment de l'axe  $y^1 = 0$ . Le **domaine d'influence** du segment  $\sigma$  est l'ensemble des points dont le domaine de dépendance est intersecté par  $\sigma$ . Le **domaine de détermination** issu du segment  $\sigma$  est l'ensemble des points dont le domaine de dépendance est inclus dans  $\sigma$  ; on le note  $D_d(\sigma)$ .  $\square$

Les définitions 1.2.2 et 1.2.3 sont fondamentales en théorie des systèmes différentiels linéaires hyperboliques. En effet, elles définissent les ensembles dans lesquelles une donnée de Cauchy a effectivement une influence sur une solution et en particulier l'ensemble dans lequel elle détermine une solution. Nous avons le théorème d'unicité<sup>(\*)</sup> :

<sup>(\*)</sup> Nous renvoyons à [Courant et Hilbert] p 445-448 pour une démonstration.

**1.2.4. Théorème.** - Soit le problème de Cauchy homogène  $(P_h)$ , avec  $\Gamma$  une courbe libre :

$$(P_h) \quad \begin{cases} \mathbf{u}_{,1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{,2} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Si le système est hyperbolique alors,  $\mathbf{u}$  est identiquement nul dans  $D_d(\Gamma)$ , le domaine de détermination issu de  $\Gamma$ .  $\square$

**1.2.5. Remarque** - Dans le cas d'un problème de Cauchy pour un système hyperbolique analytique, c'est à dire à coefficients analytiques et une donnée de Cauchy analytique, les notions qui précèdent n'ont plus de sens. En effet, dans ce cas, la solution est entièrement déterminée par prolongement analytique unique.  $\square$

#### SYSTEME HYPERBOLIQUE DE DEUX EQUATIONS. PROBLEME DE GOURSAT.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^2$  avec les paramètres  $y^1$  et  $y^2$ . Pour toute fonction  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  définie sur  $\Omega$ , nous considérons le système différentiel linéaire du 1<sup>er</sup> ordre:

$$(1.2.6) \quad \begin{aligned} v_{1,1} - a_1^\alpha v_\alpha &= 0 \\ v_{2,2} - a_2^\alpha v_\alpha &= 0 \end{aligned}$$

où les coefficients  $a_\beta^\alpha$  sont des fonctions continues sur  $\overline{\Omega}$ .

Le système différentiel (1.2.6) est strictement hyperbolique et ses courbes caractéristiques sont les courbes à  $y^1 = \text{constante}$  et les courbes à  $y^2 = \text{constante}$ . Tous les systèmes différentiels linéaires du 1<sup>er</sup> ordre strictement hyperboliques peuvent se ramener (par un changement de variable) sous la forme (1.2.6) dite forme *diagonale*.

Nous allons considérer maintenant, des problèmes de valeurs "initiales" différentes du problème de Cauchy. Il s'agit du problème de Goursat où on se donne des valeurs "initiales" non plus sur une même courbe transversale aux caractéristiques mais des données (qu'on pourra désigner, par analogie, comme des *données de Goursat*) sur une courbe caractéristique  $C$  et sur une courbe  $\Gamma$ , transversale aux caractéristiques. De plus, ces deux courbes s'intersectent en un point et sont telles qu'il n'y ait pas de courbe caractéristique entre  $C$  et  $\Gamma$  (voir figure 1.2.2).

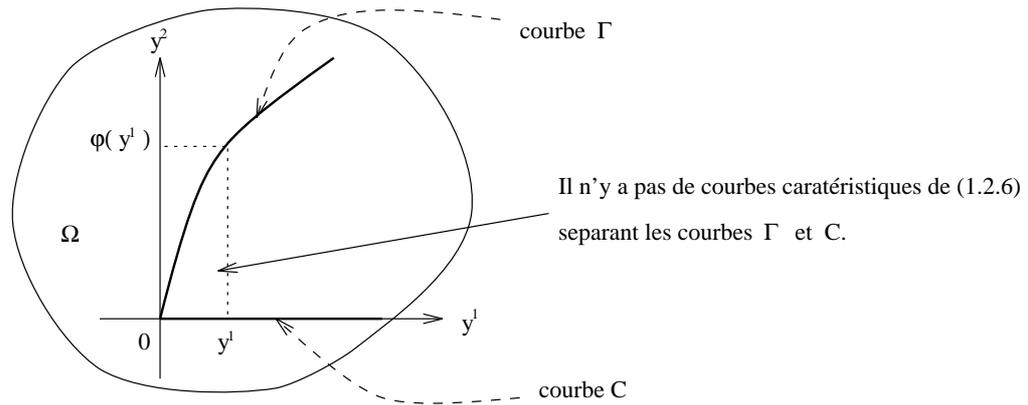


Figure 1.2.2

**1.2.6. Théorème (problème de Goursat).** - Posons  $\Omega = [0, T_1] \times [0, T_2]$  un domaine de  $\mathbf{R}^2$  et soit  $\Gamma$  une courbe régulière de  $\Omega$  contenant le point  $(0, 0)$ , donnée par

$$\Gamma = \{(y^1, y^2) / y^2 = \varphi(y^1)\},$$

où  $\varphi$  est une fonction bijective définie sur  $[0, T_1]$  et à valeur dans  $[0, T_2]$  de classe  $C^1$  telle que  $\varphi(0) = 0$ . Pour toutes fonctions  $\psi_1 \in L^2[0, T_1]$  et  $\psi_2 \in L^2[0, T_2]$ , il existe une unique fonction  $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in L^2(\Omega)$  solution du système différentiel hyperbolique (1.2.6)

$$\begin{aligned} v_{1,1} - a_1^\alpha v_\alpha &= 0 \\ v_{2,2} - a_2^\alpha v_\alpha &= 0 \end{aligned}$$

et satisfaisant aux données sur  $\Gamma$  et sur la courbe caractéristique  $y^1 = 0$  :

$$(1.2.7) \quad \begin{aligned} v_1(0, y^2) &= \psi_2 \\ v_2(y^1, \varphi(y^1)) &= \psi_1(y^1). \end{aligned}$$

Un autre problème est très important, variante du problème de Goursat, où les données de Goursat sont situées sur deux courbes caractéristiques, c'est le *problème de Goursat "dégénéré"* :

**1.2.7. Théorème.** - Le théorème 1.2.6. reste vrai si la courbe  $\Gamma$  est également une courbe caractéristique ( $\varphi = 0$ ), c'est à dire que les "données de Goursat" sont données sur deux courbes caractéristiques (différentes).  $\square$

L'existence et l'unicité d'une solution au problème de Goursat (éventuellement "dégénéré" sur deux courbes caractéristiques) sont classiques, dont les démonstrations usuelles consistent à faire des approximations successives de type Picard, voir [Courant

et Hilbert] ou [Smirnov]. Par une démonstration analogue, nous en tirons une autre variante où sur la courbe  $\Gamma$  nous remplaçons la donnée de Goursat (1.2.7) par une relation de compatibilité entre les deux inconnues, cf. (1.2.8). C'est un résultat, dont les théorèmes 1.2.6 et 1.2.7 peuvent être considéré comme des corollaires, qui nous servira à démontrer des théorèmes de rigidités de surfaces hyperboliques avec deux plis, au chapitre 4, section 5 de ce mémoire :

**1.2.8. Théorème.** - *Le théorème 1.2.6 reste vrai en remplaçant la condition (1.2.7) par*

$$(1.2.8) \quad \begin{aligned} v_1(0, y^2) &= \phi_2(y^2) \\ v_2(y^1, \varphi(y^1)) &= \phi_1(y^1) v_1(y^1, \varphi(y^1)). \quad \square \end{aligned}$$

Pour démontrer le théorème 1.2.8, nous utilisons deux résultats d'analyse fonctionnelle, un prolongement d'opérateur intégral (lemme 1.2.10) et une variante d'un théorème de trace (lemme 1.2.9) dont nous donnons les démonstrations à la section 4 de ce chapitre (annexe) ; ils seront utilisés de nouveau dans la suite de ce mémoire.

**1.2.9. Lemme.** - *Soit  $v$  une fonction de  $L^2(\Omega)$  avec  $v_{,1} \in L^2(\Omega)$ , où  $\Omega = [0, T_1] \times [0, T_2]$ . Soit une courbe  $\Gamma$  dans  $\Omega$  décrite par un difféomorphisme  $\psi$  de classe  $C^1$  de  $[0, T_2]$  dans  $[0, T_1]$ , avec  $\psi(0) = 0$ ,  $\Gamma = \{(y^1, y^2) / y^1 = \psi(y^2)\}$ .*

*Alors  $v$  possède une trace dans  $L^2(\Gamma)$  et nous avons :*

$$(1.2.11) \quad \int_0^{T_1} |v(y^1, \psi^{-1}(y^1))|^2 dy^1 \leq |\psi'|^2 \left[ \frac{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2}{T_2} + \|v_{,1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right].$$

**1.2.10. Lemme.** - *Soit  $\Omega = [0, T_1] \times [0, T_2]$  et soit  $\Gamma$  une courbe dans  $\Omega$  définie par une fonction  $\psi : \Gamma = \{(x^1, x^2) / x^2 = \psi(x^1)\}$ . Soit  $A$  l'opérateur linéaire de  $C(\Omega)$  dans  $C(\Omega)$ , définie,  $\forall v \in C(\Omega)$ , par :*

$$(1.2.9) \quad A(v)(x^1, x^2) = \int_{\psi(x^1)}^{x^2} v(x^1, t) dt.$$

*Pour toute fonction  $v$  de  $C(\Omega)$  nous avons l'estimation :*

$$(1.2.10) \quad \|A(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq T_2 \|v\|_{L^2(\Omega)},$$

*de sorte que  $A$  se prolonge par continuité en un opérateur, toujours noté  $A$ , défini de  $L^2(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  satisfaisant pour toute fonction  $v$  de  $L^2(\Omega)$  à :*

$$A(v)_{,2} = v \in L^2(\Omega)$$

*et*

$$A(v)|_{\Gamma} = 0. \quad \square$$

*Démonstration du théorème 1.2.8.* Soit  $A$  l'opérateur défini pour toutes fonctions continues  $u_1$  et  $u_2$  sur  $\Omega$  :  $A(u_1, u_2) = (v_1, v_2)$  avec :

$$(1.2.12) \quad \begin{aligned} v_1(y^1, y^2) &= \int_0^{y^1} a_1^\alpha u_\alpha(\hat{y}^1, y^2) d\hat{y}^1 + \phi_2(y^2) \\ v_2(y^1, y^2) &= \int_{\varphi(y^1)}^{y^2} a_2^\alpha u_\alpha(y^1, \hat{y}^2) d\hat{y}^2 + \phi_1(y^1) v_1(y^1, \varphi(y^1)) \end{aligned}$$

De manière classique les opérateurs intégraux dans (1.2.12) sont prolongés par continuité, comme dans le lemme 1.2.10, de  $L^2(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ . On prolonge alors de même l'opérateur  $A$  de  $L^2(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  tout en gardant (abusivement) les mêmes notations.

Il est facile de voir qu'un point fixe de l'opérateur  $A$  est une solution du problème (1.2.6) - (1.2.8) et réciproquement.

Il reste alors à démontrer que  $A$  possède un unique point fixe pour prouver le théorème 1.2.8. Pour  $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) = A(u_1, u_2) - A(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$  et en posant  $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = (u_1, u_2) - (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ , en considérant la première équation de (1.2.12), d'après le lemme 1.2.10, nous avons l'inégalité :

$$(1.2.13) \quad \|\tilde{v}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq MT_1 \left[ \|\tilde{u}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{u}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right],$$

où on peut poser  $M = \sup_{\Omega} [a_\alpha^\beta] + \sup_{[0, T_1]} |\phi_1| \sup_{[0, T_2]} |\phi^{-1}|$ .

De même, avec la deuxième équation de (1.2.12), nous avons :

$$\|\tilde{v}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq MT_2 \left[ \|\tilde{u}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{u}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \sup_{[0, T_1]} |\phi_1|^2 \int_0^{T_2} dy^2 \int_0^{T_1} |\tilde{v}_1(y^1, \varphi(y^1))|^2 dy^1,$$

qui entraîne, d'après le lemme 1.2.9 :

$$\|\tilde{v}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq MT_2 \left[ \|\tilde{u}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{u}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + M \left[ \|\tilde{v}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + T_2 \|\tilde{v}_{1,1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right].$$

Or nous avons  $\tilde{v}_{1,1} = a_1^\alpha \tilde{u}_\alpha$  qui donne l'inégalité :

$$\|\tilde{v}_{1,1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq M \left[ \|\tilde{u}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{u}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right],$$

et finalement en combinant la dernière inégalité avec (1.2.13), nous obtenons :

$$(1.2.14) \quad \|\tilde{v}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq M T_2 \left[ \|\tilde{u}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{u}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right].$$

Si bien que l'opérateur  $A$  est lipschitzienne de constante  $k$  avec  $k \leq M \sup (T_1, T_2)$ .

Ainsi pour  $T_1$  et  $T_2$  suffisamment petit, la constante  $k$  devient strictement inférieure à 1, l'opérateur  $A$ , devenant contractant, possède alors un unique point fixe en vertu du lemme du point fixe<sup>(\*)</sup>. La constante  $k$  ne dépendant que du domaine  $\Omega$ , le théorème est démontré de proche en proche. ■

**1.2.11. Remarque.** - Il est facile en reprenant exactement les différentes étapes de la démonstration du théorème 1.2.8, de montrer l'existence et l'unicité du problème de Cauchy pour un système hyperbolique dans le domaine de détermination en remplaçant l'opérateur  $A$  en (1.2.12) par

$$(1.2.15) \quad \begin{aligned} v_1(y^1, y^2) &= \int_{\varphi^{-1}(y^2)}^{y^1} a_1^\alpha u_\alpha(\hat{y}^1, y^2) d\hat{y}^1 + \psi_2(y^2), \\ v_2(y^1, y^2) &= \int_{\varphi(y^1)}^{y^2} a_2^\alpha u_\alpha(y^1, \hat{y}^2) d\hat{y}^2 + \psi_1(y^1). \end{aligned}$$

Il est clair alors que la régularité des solutions d'un problème de Cauchy pour un système hyperbolique dépend de façon essentielle de la régularité de la donnée de Cauchy ; c'est le phénomène de "propagation des singularités" propre aux systèmes hyperboliques, nous pouvons par exemple penser à l'équation des ondes. □

### 1.3. EQUATION DIFFERENTIELLE DU SECOND ORDRE. CLASSIFICATION USUELLE. CAS ELLIPTIQUE.

Soit  $u$  une fonction réelle définie sur  $\Omega$ , un ouvert connexe de  $\mathbf{R}^2$  et soit l'opérateur différentiel du 2<sup>ème</sup> ordre :

$$(1.3.1) \quad B(u) = b_{11}u_{,11} + 2b_{12}u_{,12} + b_{22}u_{,22}.$$

Considérons l'équation différentielle du 2<sup>ème</sup> ordre :

$$(1.3.1a) \quad B(u) = F,$$

où les fonctions  $b_{\alpha\beta}$  sont des fonctions réelles définies sur  $\Omega$  et  $F$  une fonction dépendant des paramètres, et pouvant dépendre (linéairement) de  $u$  et des dérivées partielles premières de  $u$ .

---

(\*) Lemme du point fixe : Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $E$ , où  $E$  est un espace de Banach. Si  $f$  est contractante i.e.  $\|f(x) - f(y)\|_E \leq k\|x - y\|_E \quad \forall x, y \in E$ , où  $k < 1$  alors  $f$  possède un unique point fixe, voir par exemple [Choquet].

---

EQUATION CARACTERISTIQUE D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE DU SECOND ORDRE.

Soit  $\Gamma$  une courbe définie de façon implicite par une fonction  $\phi$  :

$$(1.3.2) \quad \Gamma = \{(y^1, y^2) \in \Omega / \phi(y^1, y^2) = 0\}.$$

On suppose que  $\phi$  est régulière et  $\phi_{,1}^2 + \phi_{,2}^2 \neq 0$ , de sorte que la courbe  $\Gamma$  est régulière.

En posant :

$$\begin{aligned} v_1 &= u_{,1} \\ v_2 &= u_{,2} \end{aligned}$$

dans (1.3.1) et en écrivant l'égalité de Schwarz, l'équation différentielle du second ordre (1.3.1a) est équivalente à un système aux dérivées partielles linéaire à deux inconnues:

$$(1.3.3) \quad \begin{cases} b_{11}v_{1,1} + b_{12}v_{2,1} + b_{12}v_{2,1} + b_{22}v_{2,2} = F \\ v_{2,1} - v_{1,2} = 0, \end{cases}$$

dont la courbe  $\Gamma$ , d'après la définition 1.1.2, est une courbe caractéristique si en chaque point de  $\Gamma$ , nous avons :

$$(1.3.4) \quad \det \left( \phi_{,1} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \phi_{,2} \begin{pmatrix} b_{12} & b_{22} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0,$$

c'est à dire si en chaque point de  $\Gamma$ , nous avons :

$$(1.3.5) \quad \phi_{,1}^2 b_{11} + 2\phi_{,1}\phi_{,2}b_{12} + \phi_{,2}^2 b_{22} = 0.$$

L'équation (1.3.5) est appelée *équation caractéristique* de l'opérateur  $B$ .

**1.3.1. Définition.** - Soit  $\Gamma$  une courbe définie comme en (1.3.2). On dira que  $\Gamma$  est une courbe caractéristique de l'opérateur différentiel du 2<sup>ème</sup> ordre  $B$ , définie comme en (1.3.1), si en chaque point de  $\Gamma$ , elle satisfait à l'équation caractéristique (1.3.5).

L'existence de solution réelle à l'équation caractéristique (1.3.5), c'est à dire de courbe caractéristique (réelle) dépend du signe du discriminant  $\Delta$  :

$$(1.3.6) \quad \Delta = b_{12}^2 - b_{11}b_{22}.$$

- Si  $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 < 0$  partout dans  $\Omega$ , alors il existe deux familles distinctes de courbes caractéristiques, autrement dit par chaque point de  $\Omega$  passent exactement deux courbes caractéristiques distinctes.

- Si  $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0$  partout dans  $\Omega$ , alors il existe une unique famille de courbes caractéristiques, autrement dit en chaque point de  $\Omega$  il passe exactement une courbe caractéristique.

- Si  $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$  partout dans  $\Omega$ , alors il n'existe pas de courbe caractéristique (réelle) dans  $\Omega$ .

C'est la classification usuelle des opérateurs différentiels du 2<sup>ème</sup> ordre :

**1.3.2. Définition.** - *On dira que  $B$  est **hyperbolique**, **parabolique** ou **elliptique** suivant que le signe de  $b_{11}b_{22} - b_{12}^2$  est strictement négatif, nul ou strictement positif uniformément sur  $\Omega$ .*

#### CAS D'UNE EQUATION ELLIPTIQUE. PROPRIETES DE REGULARITE ET DE TRACE.

Dans le cas d'une équation différentielle du second ordre elliptique, c'est à dire qu'il n'existe pas de caractéristiques réelles, il existe de nombreux résultats concernant des théorèmes de *prolongement* unique, de *régularité* intérieure et de *trace* au bord des solutions, que nous serons amenés à utiliser dans la suite de ce mémoire.

Concernant, le prolongement unique, nous citons ici un théorème de L. Hörmander (theorem 4.3 dans [Hörmander,83]), complétant des travaux de Aronszajn et de Cordes, dont nous simplifions largement l'énoncé, le restreignant dans un cadre qui nous suffira pour obtenir des cas d'inhibition de surfaces elliptiques.

**1.3.3. Théorème (prolongement unique).** - Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbf{R}^2$ . Soit  $B$  un opérateur différentiel du second ordre :

$$(1.3.8) \quad B(u) = b_{11}u_{,11} + 2b_{12}u_{,12} + b_{22}u_{,22}$$

où les fonctions  $b_{\alpha\beta}$  sont continues lipschitziennes sur  $\Omega$ . On suppose que  $B$  est uniformément elliptique ( $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$  sur  $\overline{\Omega}$ ) et que pour une fonction  $u \in H^2(\Omega)$  :

$$(1.3.9) \quad |B(u)| \leq \sum_{|\alpha| \leq 1} c_\alpha |D^\alpha u|$$

où les fonctions  $c_\alpha$  sont continues lipschitziennes sur  $\Omega$ . Si la fonction  $u$  est nulle dans un ouvert non vide contenu dans  $\Omega$ , alors  $u$  est identiquement nulle dans  $\Omega$ .

La régularité intérieure des solutions d'une équation différentielle elliptique du second ordre est classique, nous renvoyons à [Lions et Magenes,68] et à [Necas,66] pour un exposé sur ce sujet, ou encore à [Brézis,83] pour un exposé pédagogique sur la régularité des solutions faibles d'un problème aux limites elliptique.

**1.3.4. Théorème (régularité à l'intérieur).** - Soit  $\Omega'$  un ouvert dans  $\mathbf{R}^2$ . Soit  $B$  un opérateur différentiel du second ordre elliptique comme en (1.3.8). Si  $u \in H^{m+1}$  et  $B(u) \in H^m(\Omega)$  alors  $u \in H^{m+2}(\Omega)$  de même, si  $B(u) \in C^m(\Omega)$  alors  $u \in C^{m+2}(\Omega)$  pour tout  $m \geq 0$  pour tout ouvert  $\Omega$  strictement inclus dans  $\Omega'$  (tel que  $\overline{\Omega} \subset \Omega'$ ).

**1.3.5. Remarque.** - Le théorème 1.3.4 indique que la régularité de  $u$  est locale, ainsi plus les coefficients de  $B$  sont réguliers dans une partie intérieure de  $\Omega$  et plus  $u$  y sera régulière. Mais par contre il ne donne aucun renseignement sur le bord de  $\Omega$  même si les coefficients sont très réguliers, voir [Brezis,83] p.185.  $\square$

Cependant il est malgré tout possible de donner un sens à une solution même faible de la trace sur le bord de  $\Omega$  qui nous sera utile, Nous renvoyons à [Lions,67] pour une preuve de la proposition suivante :

**1.3.6. Proposition (trace au bord d'une solution d'équation elliptique).** - soit  $u$  une fonction dans  $L^2(\Omega)$ , où  $\Omega$  est un ouvert à bord régulier<sup>(\*)</sup> de  $\mathbf{R}^2$ , telle que  $\Delta u \in H^1(\Omega)$ . Alors la trace de  $u$  sur une partie  $\Gamma$  du bord  $\partial\Omega$ , a un sens dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

---

<sup>(\*)</sup> Par exemple de classe  $C^1$ .

## 1.4. ANNEXE AU CHAPITRE 1.

**Lemme 1.2.9 théorème de trace-** Soit  $v$  une fonction de

$$Z = \{u \in L^2(\Omega) \text{ et } u_{,1} \in L^2(\Omega)\}, \text{ où } \Omega = [0, T_1] \times [0, T_2].$$

Soit une courbe  $\Gamma$  dans  $\Omega$  décrite par un difféomorphisme  $\psi$  de classe  $C^1$  de  $[0, T_2]$  dans  $[0, T_1]$ , avec  $\psi(0) = 0$ . :  $\Gamma = \{(y^1, y^2) / y^1 = \psi(y^2)\}$ .

Alors  $v$  possède une trace dans  $L^2(\Gamma)$  et nous avons :

$$(1.4.1) \quad \int_0^{T_1} |v(y^1, \psi^{-1}(y^1))|^2 dy^1 \leq |\Psi'|^2 \left[ \frac{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2}{T_2} + \|v_{,1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right].$$

*Preuve du lemme 1.2.9 :* De façon classique, nous démontrons le lemme pour toute fonction  $v$  dans  $C^1(\overline{\Omega})$ , puis nous prolongeons par continuité.

Définissons alors la trace d'une fonction  $v$  comme la restriction de  $v$  sur la courbe  $\Gamma$  (on note usuellement l'application trace par  $\gamma_o$ ).

En faisant le changement de variable  $\hat{y}^1 = \psi(y^2)$ , nous avons :

$$(1.4.2) \quad \|\gamma_o(v)\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \int_0^{T_1} |v(\hat{y}^1, \psi^{-1}(\hat{y}^1))|^2 d\hat{y}^1 = \int_0^{T_2} |v(\psi(y^2), y^2) \cdot \psi'(y^2)|^2 dy^2.$$

Or

$$v(\psi(y^2), y^2) = v(y^1, y^2) - \int_{\psi(y^2)}^{y^1} v_{,1}(t, y^2) dt,$$

si bien que (1.4.1) devient :

$$\int_0^{T_1} |v(\hat{y}^1, \psi^{-1}(\hat{y}^1))|^2 d\hat{y}^1 \leq |\Psi'|^2 \left[ \int_0^{T_2} |v(y^1, y^2)|^2 dy^2 + \int_0^{T_2} \left| \int_{\psi(y^2)}^{y^1} v_{,1}(t, y^2) dt \right|^2 dy^2 \right],$$

et en intégrant cette dernière relation de 0 à  $T_1$  par rapport à la variable  $y^1$  :

$$\int_0^{T_1} \int_0^{T_1} |v(\hat{y}^1, \psi^{-1}(\hat{y}^1))|^2 d\hat{y}^1 dy^1 \leq |\Psi'|^2 \left[ \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} |v(y^1, y^2)|^2 dy^2 dy^1 + \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \left| \int_{\psi(y^2)}^{y^1} v_{,1}(t, y^2) dt \right|^2 dy^2 dy^1 \right]$$

D'où :

$$(1.4.3) \quad T_1 \int_0^{T_1} |v(\hat{y}^1, \psi^{-1}(\hat{y}^1))|^2 d\hat{y}^1 \leq |\Psi'|^2 \left[ \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + T_1 \|v_{,1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right].$$

Autrement dit, nous pouvons prolonger de façon unique l'opérateur trace par continuité de  $Z$  dans  $L^2(\Gamma)$ . En divisant (1.4.3) par  $T_1$ , nous obtenons l'estimation (1.4.1). ■

**Lemme 1.2.10.-** Soit  $\Omega = [0, T_1] \times [0, T_2]$  et soit  $\Gamma$  une courbe dans  $\Omega$  définie par une fonction  $\psi : \Gamma = \{(x^1, x^2) / x^2 = \psi(x^1)\}$ . Soit  $A$  l'opérateur linéaire de  $C(\Omega)$  dans  $C(\Omega)$ , définie,  $\forall v \in C(\Omega)$ , par :

$$(1.4.4) \quad A(v)(x^1, x^2) = \int_{\psi(x^1)}^{x^2} v(x^1, t) dt.$$

Pour toute fonction  $v$  de  $C(\Omega)$  nous avons l'estimation :

$$(1.4.5) \quad \|A(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq T_2 \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

de sorte que  $A$  se prolonge par continuité en un opérateur, toujours noté  $A$ , défini de  $L^2(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  satisfaisant pour toute fonction  $v$  de  $L^2(\Omega)$  à :

$$\begin{aligned} \text{et} \quad & A(v)|_{\Gamma} = v|_{\Gamma} \in L^2(\Gamma) \\ & A(v)|_{\Gamma} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

*Preuve du lemme 1.2.10 :* Soit  $v$  une fonction de  $L^2(\Omega)$ , il existe une suite  $v_n$  de fonctions de  $C^1(\Omega)$  telles que

$$\|v - v_n\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ce qui entraîne, puisque  $A$  est continu de  $L^2$  dans  $L^2$  :

$$\|A(v - v_n)\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

et en particulier au sens des distributions :

$$\langle A(v - v_n), \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \varphi \in D(\Omega),$$

où  $D(\Omega)$  est l'espace des fonctions indéfiniment différentiable à support compact. Si bien que nous avons :

$$\langle A(v), \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A(v_n), \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

$A(v)$  étant dans  $L^2$ , on peut définir sa dérivée partielle au sens des distributions : pour toute fonction  $\varphi$  de  $D(\Omega)$ , nous avons :

$$\begin{aligned}
\langle A(v)_{,1}, \varphi \rangle &= -\langle A(v), \varphi_{,1} \rangle \\
&= -\lim_{n \rightarrow \infty} \langle A(v_n), \varphi_{,1} \rangle \\
&= -\lim_{n \rightarrow \infty} \langle A(v_n)_{,1}, \varphi \rangle \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle v_n, \varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

d'où

$$A(v)_{,1} = v \in L^2(\Omega).$$

Ce qui, d'après le lemme 1.2.9, donne un sens à la trace de  $A(v)$  sur  $\Gamma$ , et nous avons :

$$\gamma_o(A(v)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_o(A(v_n)) = 0. \quad \blacksquare$$

## CHAPITRE 2.

### ELEMENTS DE LA THEORIE LOCALE DES SURFACES.

#### 2.1. UNE SURFACE PARAMETREE DANS E. PREMIERE ET SECONDE FORMES FONDAMENTALES.

Soient  $E$  l'espace euclidien et  $S$  une surface dans  $E$ . La surface  $S$  est définie par une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$  où  $\Omega$  est un ouvert connexe de  $\mathbf{R}^2$  et  $\mathbf{r}$  le vecteur position, une fonction vectorielle de classe  $C^2$  définie sur  $\Omega$  ; les paramètres seront généralement désignés par les variables  $y^1$  et  $y^2$  :

$$\mathbf{r} : (y^1, y^2) \in \Omega \longrightarrow \mathbf{r}(y^1, y^2) \in S.$$

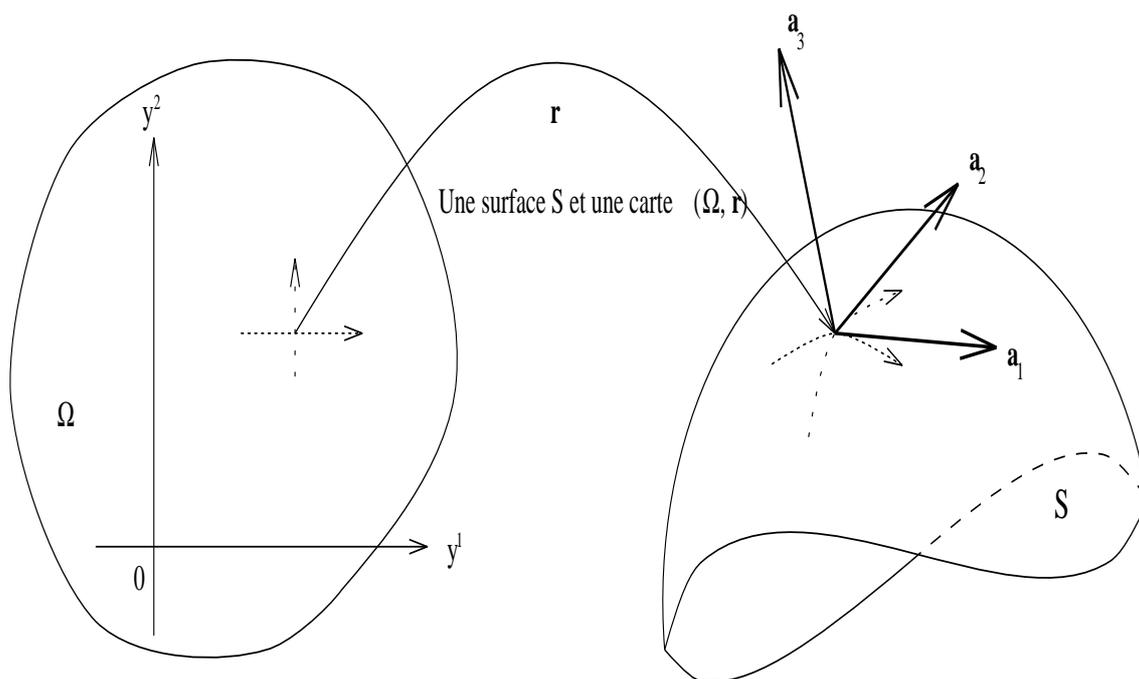


Figure 2.1.1.

Les courbes définies par  $\mathbf{r}(\{y^\alpha = \text{constante}\})$  sont appelées courbes coordonnées de  $S$ .  $(y^1, y^2)$  forment les coordonnées curvilignes de la surface.

BASE COVARIANTE ET BASE CONTRAVARIANTE.

En tout point de  $S$ , on définit les vecteurs tangents à la surface :

$$(2.1.1) \quad \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^\alpha},$$

et le vecteur normal unitaire :

$$(2.1.2) \quad \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|}.$$

Ayant imposé la régularité  $C^2$  de la surface  $S$  (par la régularité  $C^2$  de  $\mathbf{r}$ ) les vecteurs tangents  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  sont définis de façon unique ; on suppose de plus qu'ils ne sont jamais colinéaires.

**2.1.1. Définition** - *Le triplet  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ , indices en bas, forme un repère de  $\mathbf{R}^3$  en chaque point de  $S$ . On l'appelle repère mobile de Gauss ou encore **base covariante**. □*

La base covariante n'est, en général, pas un repère orthonormé ni même orthogonal. C'est pourquoi, pour des commodités de calcul, on lui associe une base duale.

**2.1.2. Définition.** - *Le triplet  $(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3)$ , indices en haut, forme la **base contravariante** en tout point de la surface. Elle est définie par :*

$$(2.1.3) \quad \langle \mathbf{a}^i, \mathbf{a}_j \rangle = \delta_j^i. \quad \square$$

où  $\delta_j^i$  désigne le symbole de Kronecker.

Ainsi, tout vecteur  $\mathbf{v}$  de  $\mathbf{R}^3$  peut s'exprimer dans ces deux bases par ses composantes covariantes (indices en haut) :

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{a}_1 + v^2 \mathbf{a}_2 + v^3 \mathbf{a}_3,$$

ou par ses composantes contravariantes (indices en bas) :

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{a}^1 + v_2 \mathbf{a}^2 + v_3 \mathbf{a}^3.$$

## PREMIERE ET SECONDE FORMES FONDAMENTALES.

Définissons maintenant les deux premières formes fondamentales d'une surface. Ce sont des applications qui, à tout point de la surface, associe une forme quadratique sur le plan tangent à la surface. Soient  $M$  un point de  $S$  et  $T_M S$  le plan tangent à  $S$  en  $M$  :

**2.1.3. Définition.** -  $\mathbf{I}_M$ , la *première forme fondamentale* de la surface  $S$  en  $M$  est la forme quadratique sur  $T_M S$  dont les coefficients ( $a_{\alpha\beta}$ ) de sa représentation matricielle dans le repère  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ , sont donnés par :

$$(2.1.4) \quad a_{\alpha\beta} = \langle \mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta \rangle. \quad \square$$

Si bien que  $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ .

En chaque point  $M$  de la surface  $S$ , la première forme fondamentale est définie comme le carré de la forme différentielle  $d\mathbf{r}$  ; on note :  $\mathbf{I} = d\mathbf{r}.d\mathbf{r}$ . On peut également la définir, en chaque point, comme la restriction sur le plan tangent du produit scalaire euclidien (c'est à dire la métrique euclidienne) de  $E$ . Elle induit une métrique sur la surface. On la note fréquemment  $ds^2$  (voir [Stoker,69]).

$$\begin{aligned} \forall X \in T_M S \approx \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{I}_M(X) &= (d\mathbf{r}.d\mathbf{r})_M(X) \\ X = x^1 \mathbf{a}_1 + x^2 \mathbf{a}_2. &= \langle X, X \rangle = \langle x^1 \mathbf{a}_1 + x^2 \mathbf{a}_2, x^1 \mathbf{a}_1 + x^2 \mathbf{a}_2 \rangle \\ &= x^1 x^1 a_{11} + 2x^1 x^2 a_{12} + x^2 x^2 a_{22}. \end{aligned}$$

**2.1.4. Définition.** -  $\mathbf{II}_M$ , la *seconde forme fondamentale* de la surface  $S$  est la forme quadratique sur  $T_M S$ , dont les coefficients ( $b_{\alpha\beta}$ ) de sa représentation matricielle dans le repère  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  sont donnés par :

$$(2.1.5) \quad b_{\alpha\beta} = \langle -\mathbf{a}_{3,\alpha}, \mathbf{a}_\beta \rangle. \quad \square$$

En dérivant l'expression  $\langle \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_\alpha \rangle = 0$ , on obtient :  $\langle \mathbf{a}_{3,\beta}, \mathbf{a}_\alpha \rangle + \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \rangle = 0$ ,

nous en déduisons que les coefficients  $b_{\alpha\beta}$  sont symétriques :

$$(2.1.6) \quad b_{\alpha\beta} = \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \rangle = b_{\beta\alpha}.$$

Ainsi pour tout point  $M$  de  $S$ , la seconde forme fondamentale est définie comme le produit scalaire des formes différentielles  $d(-\mathbf{a}_3).d\mathbf{r}$ .

$$\begin{aligned} \forall X \in T_M S, \quad \mathbf{II}_M(X) &= -(d\mathbf{a}_3.d\mathbf{r})_M(X) \\ X = x^1 \mathbf{a}_1 + x^2 \mathbf{a}_2. &= - \langle x^1 \mathbf{a}_{3,1} + x^2 \mathbf{a}_{3,2}, x^1 \mathbf{a}_1 + x^2 \mathbf{a}_2 \rangle \\ &= x^1 x^1 b_{11} + 2x^1 x^2 b_{12} + x^2 x^2 b_{22}. \end{aligned}$$

Aux coefficients des deux premières formes fondamentales,  $a_{\alpha\beta}$  et  $b_{\alpha\beta}$ , nous associons les coefficients :

$$(2.1.7) \quad a^{\alpha\beta} = \langle \mathbf{a}^\alpha, \mathbf{a}^\beta \rangle$$

$$(2.1.8) \quad b_\beta^\alpha = - \langle \mathbf{a}^3_{,\beta}, \mathbf{a}^\alpha \rangle.$$

On voit facilement que

$$(2.1.9) \quad \mathbf{a}^\alpha = a^{\alpha 1} \mathbf{a}_1 + a^{\alpha 2} \mathbf{a}_2.$$

Si bien que

$$(2.1.10) \quad a^{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha,$$

c'est à dire que  $(a^{\alpha\beta})$  est la matrice inverse de  $(a_{\alpha\beta})$ .

D'autre part, en faisant le produit scalaire des deux membres de la relation (2.1.9) par  $\mathbf{a}^3_{,\alpha}$  nous obtenons :

$$(2.1.11) \quad b_\beta^\alpha = b_{\beta\gamma} a^{\gamma\alpha}.$$

Les dérivées partielles de la base covariante (resp. contravariante) s'expriment alors dans la base covariante (resp. contravariante) à l'aide de ces coefficients; ce sont les **formules de Gauss et de Weingarten** :

$$(2.1.12) \quad \begin{aligned} \mathbf{a}_{\alpha,\beta} &= \Gamma_{\alpha\beta}^1 \mathbf{a}_1 + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \mathbf{a}_2 + b_{\alpha\beta} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}^\alpha_{,\beta} &= -\Gamma_{\beta 1}^\alpha \mathbf{a}^1 - \Gamma_{\beta 2}^\alpha \mathbf{a}^2 - b_\beta^\alpha \mathbf{a}^3 \\ \mathbf{a}_{3,\lambda} &= b_\lambda^1 \mathbf{a}_1 + b_\lambda^2 \mathbf{a}_2 = -b_{\lambda 1} \mathbf{a}^1 - b_{\lambda 2} \mathbf{a}^2. \end{aligned}$$

où les coefficients  $\Gamma_{\alpha}^{\beta\lambda}$  sont les **symboles de Christoffel** définis par:

$$(2.1.13) \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma = \langle \mathbf{a}^\gamma, \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \rangle.$$

Etant donné un champ de vecteur  $\mathbf{u}$  (à valeur dans  $\mathbf{R}^3$ ) défini sur une surface  $S$  (ou plutôt sur  $\Omega$ ), nous pouvons exprimer ses dérivées partielles dans la base contravariante (resp. dans la base covariante) en fonction des composantes covariantes de  $\mathbf{u}$  et de leurs dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{,\alpha} &= (u_1 \mathbf{a}^1 + u_2 \mathbf{a}^2 + u_3 \mathbf{a}^3)_{,\alpha} \\ &= u_{1,\alpha} \mathbf{a}^1 + u_{2,\alpha} \mathbf{a}^2 + u_{3,\alpha} \mathbf{a}^3 + u_1 \mathbf{a}^1_{,\alpha} + u_2 \mathbf{a}^2_{,\alpha} + u_3 \mathbf{a}^3_{,\alpha}. \end{aligned}$$

Si bien qu'en développant suivant les formules de Gauss et de Weingarten (2.1.12) et en regroupant suivant la base contravariante, nous avons l'expression :

$$(2.1.14) \quad \mathbf{u}_{,\alpha} = (u_{1,\alpha} - \Gamma_{1\alpha}^{\lambda} u_{\lambda} - b_{1\alpha} u_3) \mathbf{a}^1 + (u_{2,\alpha} - \Gamma_{2\alpha}^{\lambda} u_{\lambda} - b_{2\alpha} u_3) \mathbf{a}^2 + (u_{3,\alpha} - b_{\alpha}^{\lambda} u_{\lambda}) \mathbf{a}^3$$

Terminons cette section par des propriétés intrinsèques (à titre indicatif) des deux premières formes fondamentales d'une surface :

**2.1.5. Proposition.** - *La première et la deuxième forme fondamentale  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{II}$  sont des formes intrinsèques à la surface. Elles sont invariantes par changement de variables préservant l'orientation.*  $\square$

L'origine de la dénomination des deux formes fondamentales provient du fait qu'elles suffisent à déterminer toutes les propriétés géométriques de la surface considérée, nous renvoyons par exemple à [Klingenberg,81] :

**2.1.6. Théorème fondamental de la théorie des surfaces.** - *Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbf{R}^2$ , soient  $\mathbf{I}_y$  et  $\mathbf{II}_y$  deux formes quadratiques sur  $T_y \mathbf{R}^2$ ,  $y \in \Omega$  dont les coefficients  $a_{\alpha\beta}$  et  $a_{\alpha\beta}$  sont des fonctions différentiables de  $y$ . Si  $\mathbf{I}_y$  est définie positive et que les coefficients  $a_{\alpha\beta}$  et  $b_{\alpha\beta}$  satisfont aux équations de Gauss et Codazzi-Mainardi<sup>(\*)</sup> :*

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^{\lambda} + \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^{\lambda} + (\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \Gamma_{\mu\gamma}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda}) = (b_{\alpha\beta} b_{\gamma\mu} - b_{\alpha\gamma} b_{\mu\beta}) a^{\lambda\mu}$$

$$b_{\alpha\beta,\gamma} - b_{\alpha\gamma,\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} b_{\mu\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} b_{\mu\beta} = 0.$$

*Alors, il existe une surface  $S$  dont les première et seconde formes fondamentales sont  $\mathbf{I}_y$  et  $\mathbf{II}_y$  ; de plus,  $S$  est unique modulo une isométrie de  $\mathbf{R}^3$ .*

## 2.2. UNE COURBE PARAMETREE SUR UNE SURFACE.

Soit  $S$  une surface définie par une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$  comme précédemment. Considérons une courbe  $C$  appartenant à  $S$ . Il existe une carte  $(I, \mathbf{c})$  définissant  $C$  telle que :

---

<sup>(\*)</sup> Les équations de Gauss et Codazzi-Mainardi, pour une surface avec une carte donnée  $(\Omega, \mathbf{r})$  sont équivalentes aux relations de compatibilité :

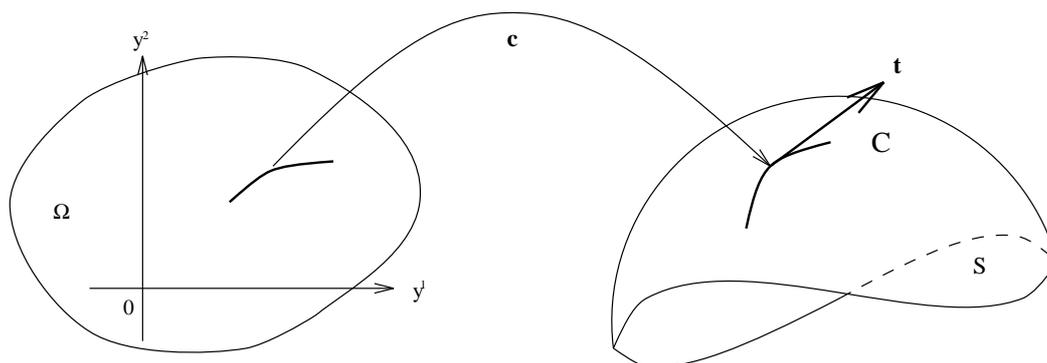
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\alpha\beta\gamma} &= \mathbf{r}_{\alpha\gamma\beta} \\ \mathbf{a}_{3,\alpha\beta} &= \mathbf{a}_{3,\beta\alpha} \end{aligned}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{ro}\varphi : I \rightarrow S$$

où  $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$  est une application régulière ( $C^2$ ) définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeur dans  $\Omega$ .  $\varphi$  étant de classe  $C^2$ ,  $\mathbf{c}$  l'est aussi. Désignons par  $s$  le paramètre parcourant  $I$ .

En supposant que  $C$  n'est pas une droite, on définit en tout point de  $C$  le **vecteur unitaire tangent** à la courbe, si  $\mathbf{c}'$  désigne la dérivation par rapport au paramètre  $s$  :

$$(2.2.1) \quad \mathbf{t} = \mathbf{c}' / \|\mathbf{c}'\|,$$



Une courbe  $C$  sur une surface  $S$ .

Figure 2.2.1.

la **normale principale unitaire** de la courbe :

$$(2.2.2) \quad \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} / \left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right\|,$$

et le **vecteur binormal** :

$$(2.2.3) \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}.$$

**2.2.1. Définition.** - Pour toute courbe  $C$  non-rectiligne, le triplet  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  forme en chaque point de  $C$ , une base orthonormale de  $E$  appelée **trièdre de Frenet**.  $\square$

Etant donné le trièdre de Frenet  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  d'une courbe  $C = (I, \mathbf{c})$ , nous avons les **formules de Serret-Frenet** :

$$(2.2.4) \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = k \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k \mathbf{t} + \chi \mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\chi \mathbf{n}.$$

Les coefficients  $k$  et  $\chi$  sont la **courbure** et la **torsion** de la courbe  $C$ .

L'étude des courbes sur une surface donne une interprétation géométrique des première et seconde forme fondamentales.

La première forme fondamentale **I** mesure les longueurs (intrinsèques) de la surface. Ce qui est naturel puisque **I** est définie comme la restriction du produit scalaire. Les coefficients de sa représentation matricielle apparaissent dans l'expression donnant la longueur d'un arc de courbe. D'un autre côté, en ce qui concerne la seconde forme fondamentale, **II**, elle mesure la courbure de la surface dans une direction. Nous avons les résultats classiques suivants (voir par exemple [Klingenberg,81]) :

**2.2.2. Proposition.** - Soit  $C = ( I, \mathbf{c} )$  une courbe sur la surface  $S$ . La longueur d'arc  $L(\mathbf{c}, s_0, s_1)$  entre  $\mathbf{c}(s_0)$  et  $\mathbf{c}(s_1)$  est donnée par :

$$(2.2.5) \quad L(\mathbf{c}, s_0, s_1) = \int_{s_0}^{s_1} |\mathbf{c}'(s)| ds = \int_{s_0}^{s_1} [a_{\alpha\beta} \langle \varphi_{,\alpha}, \varphi_{,\beta} \rangle]^{1/2} ds . \square$$

**2.2.3. Proposition.** - Soit  $C = ( I, \mathbf{c} )$  une courbe sur la surface  $S$  comme précédemment. Soient  $s \in I$  et  $M = \mathbf{c}(s)$  un point de  $C$ . Soit  $\mathbf{t}$  la tangente unitaire à la courbe  $C$  au point  $M$ , alors :

$$(2.2.6) \quad \mathbf{II}_{\mathbf{c}(s)}(\mathbf{t}) = k \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{n} \rangle . \square \quad \bullet$$

**2.2.4. Définition.** - En tout point  $M$  de la courbe  $C$ , on définit :

- le **plan osculateur** à la courbe =  $[M, \mathbf{t}, \mathbf{n}]$ ,
- le **plan normal** à la courbe =  $[M, \mathbf{n}, \mathbf{b}]$ ,
- le **plan rectifiant** à la courbe =  $[M, \mathbf{b}, \mathbf{t}]$ .  $\square$

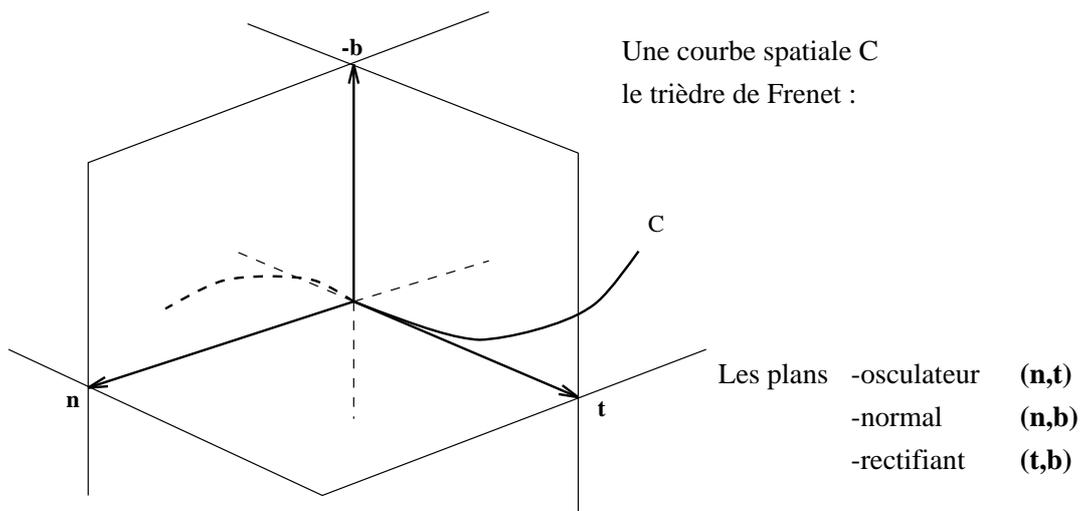


Figure 2.2.2.

**2.2.5. Remarque.** - Le plan osculateur est défini par les deux premières dérivées de  $\mathbf{c}$ . C'est le plan contenant  $M$  et qui "passe par trois points consécutifs" de la courbe (comme la droite tangente est définie par la droite limite reliant deux points de la courbe qui tendent l'un vers l'autre).  $\square$

## 2.3. COURBURE TOTALE ET CLASSIFICATION DES SURFACES. LIGNES ASYMPTOTIQUES.

Nous venons de voir que la première forme fondamentale mesure les longueurs d'une surface tandis que la seconde forme fondamentale mesure les courbures de la surface, c'est à dire la "forme géométrique". Nous précisons cela par une classification des points d'une surface.

Soit  $S$  une surface définie par une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$ . En tout point  $M$  de  $S$ , on définit la fonction qui à tout vecteur  $X$  *unitaire* tangent à  $S$  en  $M$ , associe le nombre :

$$X \rightarrow \mathbf{II}_M(X).$$

Cette fonction atteint ses deux valeurs extrémales  $k_1$  et  $k_2$ , appelés *courbures principales* (maximale et minimale). Les directions  $X$  correspondantes sont appelés *directions principales*. Notons que si  $X$  est une direction principale, alors  $-X$  l'est aussi.

**2.3.1. Définition.** - On appelle *ligne de courbure* toute courbe dont tous les vecteurs tangents sont proportionnels à une direction principale.  $\square$

**2.3.2. Remarque.** - En chaque point de la surface, nous avons l'alternative :

- ou bien toute direction est direction principale (dans ce cas  $\mathbf{II}_M$  est proportionnel à  $\mathbf{I}_M$ ), on dit que le point est un *ombilic* ( c'est par exemple le cas de tous les points d'une sphère ou d'un plan),
- ou bien il existe exactement (au signe près) deux directions principales, qui sont alors *orthogonales*.  $\square$

Les directions  $X$  pour lesquelles la fonction  $\mathbf{II}_M$  s'annule ( $\mathbf{II}_M(X) = 0$ ), et sur lesquelles les courbures changent éventuellement de signe) sont appelées *directions asymptotiques*. La notion de direction asymptotique conduit à la classification des surfaces et sera d'une grande importance pour la suite de ce mémoire, en ce qui concerne

des cas rigidification de surfaces (voir chapitre 4). Notons également que si  $X$  est une direction asymptotique, alors  $-X$  l'est aussi.

**2.3.3. Définition.** - Une *ligne asymptotique* d'une surface  $S$  est une courbe dont chaque vecteur tangent est proportionnel à une direction asymptotique.

**2.3.4. Remarque.** - D'après la proposition 2.2.3, une ligne asymptotique est, soit une courbe dont les plans osculateurs sont confondus avec les plans tangents à la surface, soit une droite.  $\square$

**2.3.5. Remarque.** - Les directions asymptotiques et les lignes asymptotiques d'une surface sont invariantes par changement de variables. Autrement dit, les directions asymptotiques et les courbes asymptotiques sont intrinsèques à la surface et ne dépendent pas du paramétrage choisi. Cela résulte immédiatement de l'invariance de la seconde forme fondamentale par changement de variables.  $\square$

**2.3.6. Remarque.** - De même pour les directions asymptotiques et pour les mêmes raisons, les directions principales et les lignes de courbures d'une surface sont invariantes par changement de variables.  $\square$

**2.3.7. Définition.** - En chaque point d'une surface, on appelle *courbure totale* ou *courbure de Gauss* de la surface, le produit des deux courbures principales, on le note  $K$ . On appelle *courbure moyenne* en chaque point de la surface la somme des deux courbures principales, on le note  $H$ .

$$(2.3.1) \quad K = k_1 \cdot k_2,$$

$$H = k_1 + k_2.$$

Suivant le signe de la courbure de Gauss  $K$ , nous avons la classification usuelle d'un point  $M$  de la surface :

Si  $\underline{K} > 0$  : les courbures principales de  $S$  passant par  $M$  sont de même signe, et il n'y a pas de directions asymptotiques en  $M$ . La surface (du moins un voisinage de  $M$ ) se trouve d'un même côté du plan tangent. On dit que le point  $M$  est *elliptique*.

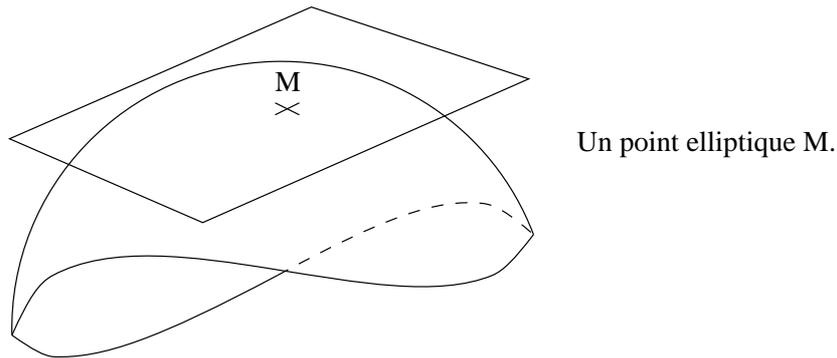


Figure 2.3.1.

Si  $\underline{K} < 0$  : les courbures principales  $k_1$  et  $k_2$  sont de signe opposé. Le plan tangent traverse la surface suivant les deux directions (au signe près) qui annulent la seconde forme fondamentale (ce sont les directions asymptotiques). On dit que le point est *hyperbolique*.

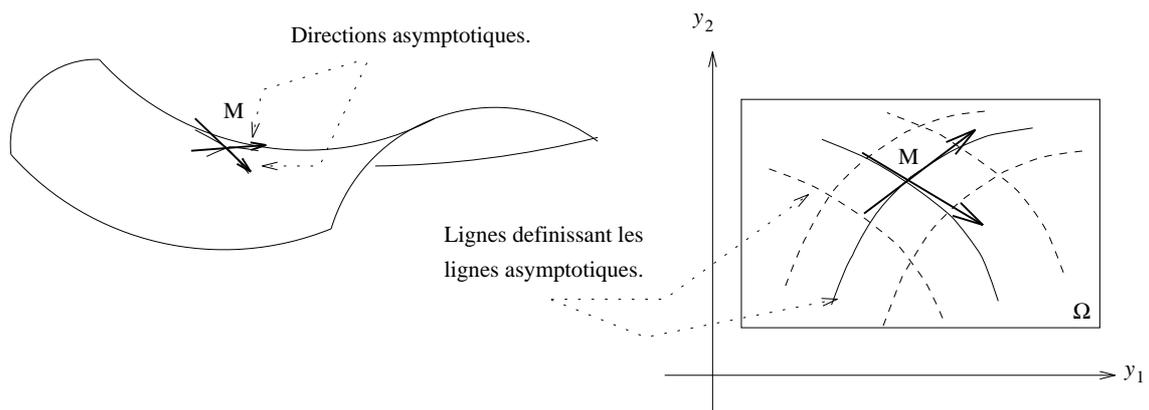


Figure 2.3.2.

Si  $\underline{K} = 0$  :  $k_1$  ou  $k_2$  s'annule, il y a deux possibilités :

-  $k_1$  ou  $k_2 \neq 0$ . Les courbures sont du même signe. Le plan tangent "colle" à la surface (linéairement) le long de la direction principale de courbure nulle (qui est donc une direction asymptotique), on dit que le point est *parabolique*.

-  $k_1$  et  $k_2$  sont nulles toutes les deux. Toutes les courbes passant par M ont une courbure nulle (i.e.  $\mathbf{I}_M \equiv 0$ ), on dit que le point est *méplat* ; une surface entièrement constituée de points méplats est une surface plane (i.e.  $\mathbf{II} \equiv 0$ ).

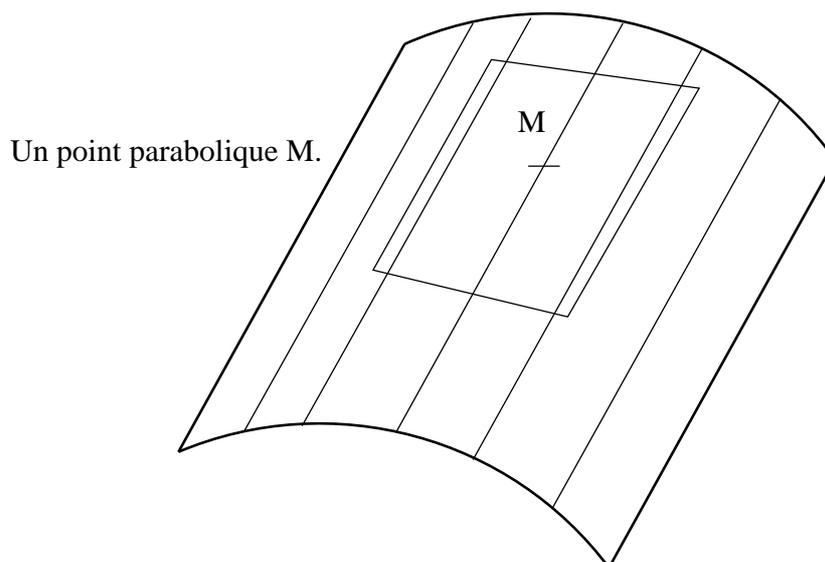


Figure 2.3.3.

La courbure de Gauss  $K$ , a priori définie par la seconde forme fondamentale, peut être obtenue par les déterminants des deux formes fondamentales :

**2.3.8. Proposition.** - *Le signe de la courbure de Gauss  $K$  dépend du signe de  $\det(\mathbf{II})$ , et nous avons de plus :*

$$(2.3.2) \quad K = \frac{\det(\mathbf{II})}{\det(\mathbf{I})}. \quad \square$$

Nous renvoyons à [Klingenberg,81] pour une démonstration de la proposition 2.3.8, mais il est possible de montrer que  $K$  et  $\det(\mathbf{II})$  sont de même signe sans avoir montré la relation (2.3.2).

La seconde forme fondamentale étant une forme quadratique, une direction asymptotique  $X=(a \mathbf{a}_1 + b \mathbf{a}_2)$  est une racine du polynôme du second degré :

$$(2.3.3) \quad \mathbf{II}(X) = a^2 b_{11} + 2ab b_{12} + b^2 b_{22}.$$

Nous avons alors la proposition :

**2.3.9. Proposition.** - *Soit  $C$  une courbe de  $S$ , définie par la carte  $(\mathbf{I}, \mathbf{c} = \mathbf{r}[\varphi_1(s), \varphi_2(s)])$ . La courbe  $C$  est une ligne asymptotique de  $S$  si :*

$$(2.3.4) \quad (\varphi_1')^2 b_{11} - (2\varphi_1' \varphi_2') b_{12} + (\varphi_2')^2 b_{22} = 0.$$

L'existence de directions asymptotiques (réelles) est donc subordonnée au signe du discriminant réduit :

$$\Delta = (b_{12})^2 - b_{11}b_{22} = -\det(\mathbf{II}).$$

Suivant que  $\Delta$  est  $> 0$ , nul, ou  $< 0$ , il existe (au signe près) respectivement, deux directions asymptotiques distinctes, une direction asymptotique double (à courbure nulle) ou aucune direction asymptotique réelle.

Si bien que le signe de la courbure de Gauss est égal au signe de  $-\Delta$ . Récapitulons :

**2.3.9. Proposition.** - Soit  $S$  une surface comme précédemment et  $M$  un point de  $S$ .

- $M$  est un point elliptique  $\Leftrightarrow K > 0 \Leftrightarrow \det(\mathbf{II}_M) > 0$ , il n'existe pas de direction asymptotique en  $M$ .
- $M$  est un point parabolique  $\Leftrightarrow K = 0 \Leftrightarrow \det(\mathbf{II}_M) = 0$  et  $\mathbf{II}_M \neq 0$ , il existe une unique direction asymptotique (au signe près).
- $M$  est un point hyperbolique  $\Leftrightarrow K < 0 \Leftrightarrow \det(\mathbf{II}_M) < 0$ , il existe uniquement deux directions asymptotiques distinctes (au signe près).

De façon analogue nous avons la classification usuelle d'une portion de surface :

**2.3.10. Définition.** - Soit  $S = (\Omega, \mathbf{r})$  une surface paramétrée. On dira que  $S$  est uniformément **hyperbolique**, **parabolique** ou **elliptique**, suivant que  $\det(\mathbf{II})$  ou  $K$  sont négatifs, nuls ou positifs uniformément sur  $\overline{\Omega}$ .

Sur une surface elliptique, les directions asymptotiques sont complexes non-réelles, il n'y a donc pas de lignes asymptotiques, a fortiori.

Sur une surface hyperbolique, on détermine à partir de (2.3.4), deux familles de lignes asymptotiques ; nous verrons dans la section qu'il est possible d'avoir une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$  telle que les courbes coordonnées soient les lignes asymptotiques.

Le cas d'une surface dont tous les points sont paraboliques est exposé à la section 5 de ce chapitre (cas des surfaces réglées).

Naturellement, une surface peut contenir tout les types de points, comme par exemple dans le cas d'un vase qui peut être considéré comme constitué d'une première

partie hyperbolique (zone I) puis d'une partie cylindrique (zone II) , puis encore d'une partie hyperbolique (zone III) et enfin d'une partie elliptique (zone IV) :

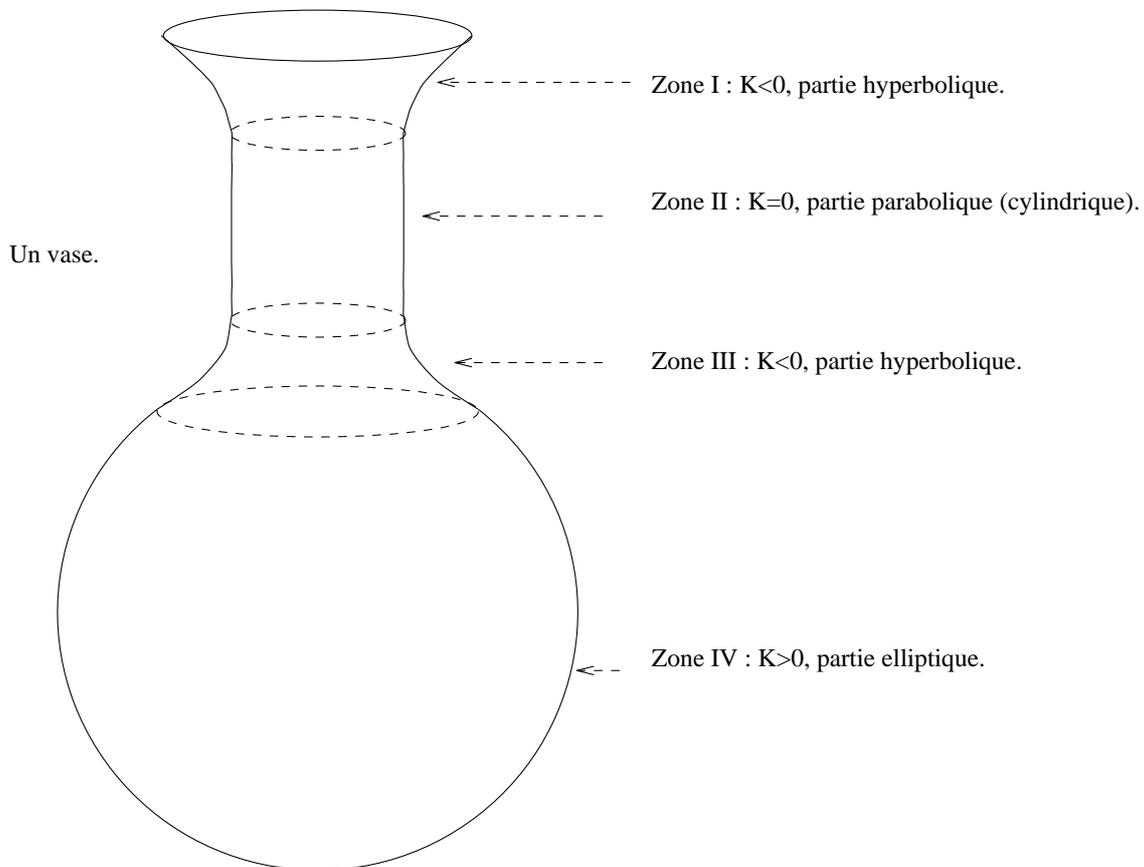


Figure 2.3.4.

Remarquons que dans le cas du vase la surface est de classe  $C^1$  mais de classe  $C^2$  par morceaux seulement, en effet entre les zones III et IV (la ligne en pointillé de la figure 2.3.4), la courbure totale  $K$  change de signe sans passer par 0.

## 2.4. COORDONNEES SPECIALES SUR UNE SURFACE.

Une propriété importante de la géométrie des surfaces est la possibilité de choisir, selon la nature de la surface, une carte particulière telle que les coefficients de la seconde forme fondamentale ou les symboles de Christoffel se simplifient de manière adéquate selon les besoins. Cette propriété découle de la réduction classique d'une forme quadratique :

**2.4.1. Théorème.** - Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbf{R}^2$  avec les paramètres  $y^1$  et  $y^2$  et soit  $F$  une forme quadratique définie sur  $\Omega$  :

$$(2.4.1) \quad F = ady^1 dy^1 + 2bdy^1 dy^2 + cdy^2 dy^2$$

où les coefficients  $a, b, c$  sont des fonctions continues sur  $\Omega$ .

Si  $F$  est définie positive, i.e.  $ac-b^2 > 0$  uniformément sur  $\Omega$ , alors il existe un changement de variables  $\eta_1(y^1, y^2)$  et  $\eta_2(y^1, y^2)$  et une fonction  $\alpha$  continue sur  $\Omega$  telle que  $F$  s'écrit, dans ces nouvelles variables :

$$(2.4.2) \quad F = \alpha[d\eta_1 d\eta_1 + d\eta_2 d\eta_2].$$

Si  $-F$  est définie positive, i.e.  $ac-b^2 < 0$  uniformément sur  $\Omega$ , alors il existe un changement de variables  $\eta_1(y^1, y^2)$  et  $\eta_2(y^1, y^2)$  et une fonction  $\beta$  continue sur  $\Omega$  telle que  $F$  s'écrit, dans ces nouvelles variables :

$$(2.4.3) \quad F = \beta[d\eta_1 d\eta_2].$$

Nous renvoyons à [Vekua] p. 76-101 ou à [Courant et Hilbert] p. 155-160 pour une démonstration du théorème 2.4.1.

**2.4.2. Proposition.** - Soit  $S$  une surface uniformément elliptique, il existe une carte de  $S$   $(\Omega, \mathbf{r})$  telle que les coefficients de la seconde forme fondamentale se réduisent dans cette carte :

$$(2.4.4) \quad b_{11} = b_{22} = \sqrt{aK},$$

$$(2.4.5) \quad b_{12} = 0,$$

où  $K (>0)$  désigne la courbure totale de  $S$ . On appelle les coordonnées d'une telle carte système de coordonnées isométriques conjuguées.

*Preuve :* Dans le cas d'une surface uniformément elliptique, par définition, la seconde forme fondamentale est une forme définie positive. Si bien que d'après le théorème 2.4.1, il existe un système de coordonnées  $(\Omega, \mathbf{r})$  de  $S$  tel que la seconde forme fondamentale s'écrive sous la forme (2.4.2). ■

**2.4.3. Proposition.** - Soit  $S$  une surface uniformément hyperbolique, il existe une carte de  $S$   $(\Omega, \mathbf{r})$  telle que les coefficients de la seconde forme fondamentale se réduisent dans cette carte :

$$(2.4.6) \quad b_{11} = b_{22} = 0,$$

$$(2.4.7) \quad b_{12} \neq 0.$$

Dans cette carte, les courbes coordonnées définissent les lignes asymptotiques de  $S$ .

*Preuve :* Dans le cas d'une surface uniformément hyperbolique, par définition, la seconde forme fondamentale est une forme définie négative. Si bien que d'après le théorème 2.4.2, il existe un système de coordonnées  $(\Omega, \mathbf{r})$  de  $S$  telle la seconde forme fondamentale s'écrive sous la forme (2.4.3). D'autre part, (2.4.6) indique que les tangentes aux courbes coordonnées sont des directions asymptotiques, autrement dit les courbes coordonnées sont les lignes asymptotiques de  $S$ . ■

Nous terminons cette section par un autre système de coordonnées spéciales, dite à courbes principales, sans condition sur la nature géométrique de la surface, dont nous renvoyons pour la démonstration à [Klingenberg,81], lemme 3.2.2 :

**2.4.4. Proposition.** - Soit  $S = (\Omega, \mathbf{r})$  une surface et  $M = \mathbf{r}(y_0)$  un point de  $S$  tel que les courbures principales ne sont pas égales en  $M$  (i.e. ce n'est pas un ombilic). Alors il existe un voisinage  $Y_0$  de  $y_0$  et un changement de variables  $\phi : X_0 \rightarrow Y_0$  tels que les courbes coordonnées de  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} \circ \phi$  sont des lignes de courbure.

**2.4.5. Remarque.** - La première forme fondamentale étant définie positive, d'après le théorème 2.4.1, il existe un système de coordonnées, tel que la première forme fondamentale s'écrive sous la forme (2.4.2), c'est à dire un système de coordonnées orthogonales. Si bien que la proposition précédente reste vraie même si  $M$  est un ombilic. □

## 2.5. CAS D'UNE SURFACE REGLÉE.

**2.5.1. Définition.** - Une surface  $S$  est dite *réglée* si il existe une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$  de  $S$  telle que

$$(2.5.1) \quad \mathbf{r}(y^1, y^2) = \mathbf{c}(y^1) + y^2 \mathbf{g}(y^1). \quad \square$$

Où  $\mathbf{g}(y^1)$  est un champ de vecteur sur la courbe  $\mathbf{c}(y^1)$ , qu'on peut choisir unitaire.

Les courbes à  $y^1$  constant sont des droites, ce sont les **généatrices** de  $S$ . Les courbes à  $y^2$  constant (par exemple la courbe  $\mathbf{c}$ ) sont appelées **directrices**.

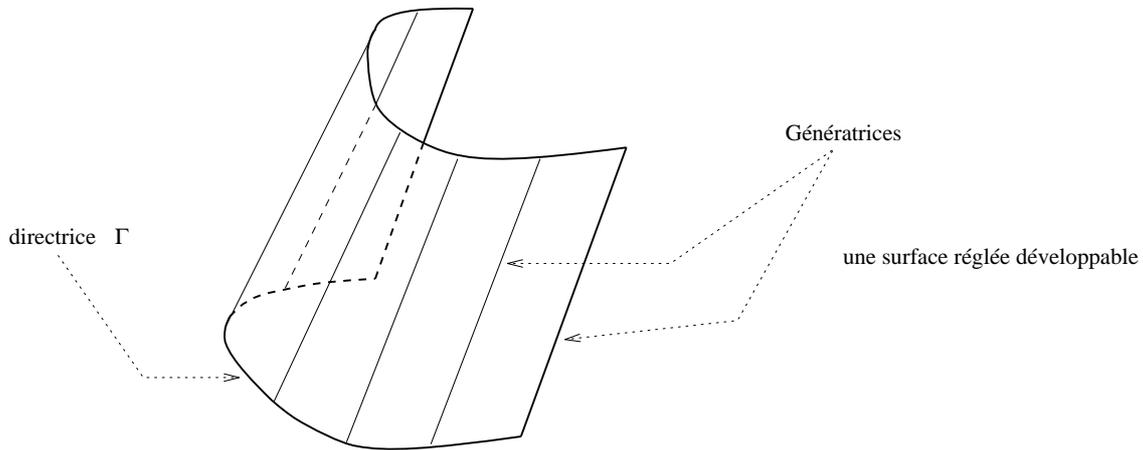


Figure 2.5.1.

**2.5.2. Proposition.** - Soit  $S$  une surface réglée définie comme en (2.5.1), alors les coefficients de la seconde forme fondamentale et les symboles de Christoffels se simplifient :

$$(2.5.2) \quad b_{22} = 0,$$

$$(2.5.3) \quad \Gamma_{22}^{\alpha} = 0.$$

*Preuve :* Pour une surface  $S$  réglée définie comme en (2.5.1) nous avons :

$$\mathbf{a}_2(y^1, y^2) = \mathbf{r}_{,2}(y^1, y^2) = \mathbf{g}(y^1)$$

d'où :

$$\mathbf{a}_{2,2}(y^1, y^2) = \mathbf{r}_{,22}(y^1, y^2) = 0$$

et par d'après (2.1.6) et (2.1.13) (définitions des coefficients de la seconde forme fondamentale et des symboles de Christoffel de  $S$ ), il vient immédiatement (2.5.2) et (2.5.3). ■

La relation (2.5.2) indique que les courbes à  $y^1$  constant, c'est à dire les génératrices, sont des lignes asymptotiques de  $S$ . Une surface réglée est donc de courbure totale  $K \leq 0$ .

**2.5.2. Définition.** - Soit  $S$  une surface réglée. On dit que  $S$  est **développable** si la normale unitaire à  $S$  est constante le long des génératrices.

Autrement dit, une surface réglée  $S$  définie comme en (2.5.1) est développable si et seulement si :

$$\mathbf{a}_{3,2} = 0.$$

Si bien que d'après (2.1.6), nous avons de plus :

$$(2.5.4) \quad b_{12} = 0,$$

ce qui, d'après (2.5.2), entraîne que :  $\det(\mathbf{II}) = b_{12}^2 - b_{11}b_{22} = 0$ , c'est-à-dire que la courbure totale  $K$  de  $S$  est nulle (proposition 2.3.9). Résumons :

**2.5.3. Proposition.** - Soit  $S$  une surface réglée.

- i) Les génératrices sont des lignes asymptotiques, d'où  $K \leq 0$ .
- ii)  $S$  est développable si et seulement si  $K = 0$ , et si  $S$  est définie comme en (2.5.1), on a  $b_{22} = 0$ ,  $b_{12} = 0$  et  $\Gamma_{22}^\alpha = 0$ .  $\square$

**2.5.4. Corollaire.** - Une surface réglée non-développable est hyperbolique.

**2.5.5. Proposition.** - Soient  $S$  une surface réglée non-développable et  $(\Omega, \mathbf{r})$  une carte de  $S$  telle que les courbes coordonnées définissent les lignes asymptotiques de  $S$ . Comme dans la proposition 2.4.3, nous avons  $b_{11} = b_{22} = 0$ . On suppose que les génératrices de  $S$  sont les courbes à  $y^1$  constant alors nous avons de plus :

$$(2.5.5) \quad \Gamma_{22}^1 = 0.$$

*Preuve :* Les génératrices étant des droites, les tangentes aux génératrices coïncident le long d'une génératrice, si bien que nous avons :

$$\mathbf{a}_{2,2}(y^1, y^2) = c(y^1) \mathbf{a}_2(y^1, y^2)$$

où  $c$  est une fonction de la variable  $y^1$  dépendant de  $S$ . Ainsi nous avons :

$$\Gamma_{22}^1 = \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_{2,2} = c \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0. \blacksquare$$

### 2.5.6. Exemples de surfaces développables.

1 : *Cylindre généralisé*. C'est une surface développable  $S$  qui peut être définie par une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$  avec

$$\mathbf{r}(y^1, y^2) = \mathbf{c}(y^1) + y^2 \mathbf{X}_0, \square$$

où  $C = \mathbf{c}(y^1)$  une courbe plane et  $\mathbf{X}_0$  un vecteur transversal au plan de  $C$ .

2 : *cône*. Soit  $\mathbf{x}$  un point et  $\mathbf{X}(y^1)$  un champ de vecteur tel que  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{X}'$  sont linéairement indépendants. Alors un *cône de sommet  $\mathbf{x}$*  est une surface  $S = (\Omega, \mathbf{r})$  définie par

$$\mathbf{r}(y^1, y^2) = \mathbf{x} + y^2 \mathbf{X}(y^1). \square$$

3 : *Développable tangentielle*. Soit  $C = \mathbf{c}(y^1)$  une courbe telle que  $\mathbf{c}'$  et  $\mathbf{c}''$  sont linéairement indépendants (i.e.  $C$  est une courbe gauche). La surface  $S = (\Omega, \mathbf{r})$  avec

$$\mathbf{r}(y^1, y^2) = \mathbf{c}'(y^1) + y^2 \mathbf{c}''(y^1)$$

est la *développable des tangentes de  $C$* .  $\square$

Figure 2.5.1.

Les surfaces développables ne sont pas toutes les surfaces à courbure totale nulle. Il existe un exemple de surface à  $K = 0$  et qui n'est pas réglée, donc a fortiori non-développable, voir [Klingenberg,81] exercice 3.9.4 p. 68-69, d'après un exemple dû à E. Heintze. Cependant si tout les points d'une surface sont paraboliques (ne contient pas de méplat), la surface est développable. Par ailleurs les exemples de 2.5.4. sont en fait, a peu près toute les surfaces développables, cf. [Klingenberg,81], p. 59, proposition 3.7.9 et proposition 3.7.10.

## CHAPITRE 3.

### DEPLACEMENT INEXTENSIONNEL D'UNE SURFACE ET CHAMP DE ROTATION INIFITESIMALE ASSOCIE. L'ESPACE $\mathbf{R}(S)$ .

#### 3.1. DEPLACEMENT INEXTENSIONNEL D'UNE SURFACE. CAS DU PLAN.

Soit  $S$  une surface définie par une carte  $[\Omega, \mathbf{r}]$ , où  $\Omega$  est un ouvert borné connexe de  $\mathbf{R}^2$  et  $\mathbf{r}$ , le vecteur position, un champ de vecteur sur  $\Omega$ .  $S = \mathbf{r}(\overline{\Omega})$ . On note  $\mathbf{I} = d\mathbf{r}.d\mathbf{r}$  la première forme fondamentale de  $S$ .

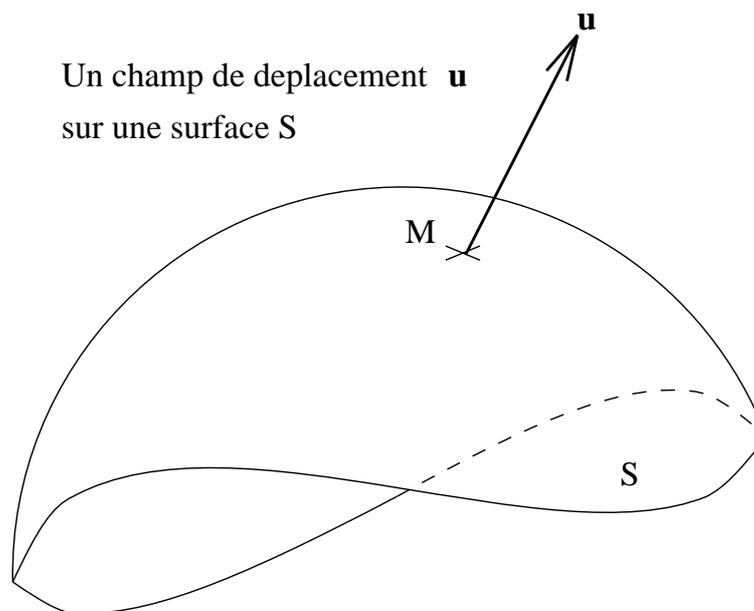


Figure 3.1.1

La surface  $S$  est déformée en lui affectant en chaque point un petit déplacement  $\mathbf{u}$ . Le déplacement  $\mathbf{u}$  peut également être considéré comme un champ de vecteur défini sur  $\Omega$ . On note alors la surface déformée  $\tilde{S} = [\Omega, (\mathbf{r} + \mathbf{u})]$ . La première forme fondamentale de  $\tilde{S}$  est  $\tilde{\mathbf{I}} = d(\mathbf{r} + \mathbf{u}).d(\mathbf{r} + \mathbf{u})$ .

Nous nous plaçons dans le cadre de la *théorie linéarisée* pour des déplacements "petits" de sorte que nous linéarisons par rapport à  $\mathbf{u}$ .

**3.1.1. Définition.** - Un déplacement  $\mathbf{u}$  est dit *inextensionnel* si :

$$(3.1.1) \quad d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{u} = 0 \text{ en tout point de } S,$$

c'est à dire, si :

$$(3.1.1a) \quad \langle \mathbf{u}_{,\alpha}, \mathbf{a}_\beta \rangle + \langle \mathbf{u}_{,\beta}, \mathbf{a}_\alpha \rangle = 0. \quad \square$$

L'équation (3.1.1a) est en fait un système de trois équations aux dérivées partielles à trois inconnues (les composantes du déplacement).

Les déplacements inextensionnels sont des déplacements qui laissent invariante (au sens linéarisé) la première forme fondamentale de  $S$ . En effet, nous avons :

$$d(\mathbf{r} + \mathbf{u}) \cdot d(\mathbf{r} + \mathbf{u}) - d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 2d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{u} + d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u}.$$

Le terme " $d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u}$ " étant d'ordre 2, la métrique de la surface est donc inchangé au sens linéarisé si  $\mathbf{u}$  est un déplacement inextensionnel.

Nous désignerons dans la suite le système (3.1.1) ou (3.1.1a) "*système de flexion [linéarisée]*", puisqu'une flexion est par essence une déformation laissant les longueurs invariantes. On l'appelle également *système de rigidité* au sens où on dira d'une surface qu'elle est "géométriquement rigide" si elle n'admet pas de déplacement inextensionnel, bien que le terme "rigide" soit équivoque dans le cadre de la mécanique.

Soit  $\mathbf{V}$  l'espace vectoriel des déplacements admissibles :

$$\mathbf{V} = \{ \mathbf{v} \in H^1 \times H^1 \times H^2(\Omega) \}.$$

C'est l'espace des déplacements admissibles dont les composantes tangentielles appartiennent à l'espace de Sobolev  $H^1 \times H^1$  et la composante normale à  $H^2$ . Muni de la norme usuelle  $H^1 \times H^1 \times H^2$ , l'espace des déplacements  $\mathbf{V}$  est *complet*. C'est l'espace usuel des déplacements, utilisé en théorie bidimensionnelle des coques élastiques, avec le modèle de Koiter : [Bernadou et Ciarlet,76] ont démontré un théorème d'existence et d'unicité pour le problème statique des coques minces dans cet espace (cf. théorème 5.1.3).

**3.1.2. Définition.** - L'espace vectoriel  $\mathbf{G}$  des déplacements inextensionnels est :

$$\mathbf{G} = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{V} / d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{u} = 0 \}. \quad \square$$

Ces déplacements sont dits inextensionnels ou appelés flexions pures (linéarisées) ["infinitesimal bendings" en anglais], puisque la première forme fondamentale mesure les longueurs de la surface (voir le chapitre 2. Théorie des surfaces). Mais il est curieux de noter qu'une vraie isométrie de  $\mathbf{R}^3$  (hormis l'identité), qui laisse invariante les longueurs de la surface, de façon *exacte* n'entre pas dans la définition d'un déplacement inextensionnel ; c'est parce que nous travaillons en théorie *linéarisé*.

D'autre part, il est facile de voir que  $\mathbf{G}$  est un sous espace vectoriel *fermé* de  $\mathbf{V}$ , c'est donc également un espace complet pour la norme induite par  $\mathbf{V}$ . Nous verrons plus tard (proposition 3.3.1) que les déplacements inextensionnels sont plus réguliers que des déplacements quelconques de  $\mathbf{V} : \mathbf{G} \subset \mathbf{H}^2(\Omega)$ , voir également [Geymonat et Sanchez,95].

**3.1.3. Définition.** - *Un déplacement  $\mathbf{u}$  sera dit **trivial** ou **rigide infinitésimal** s'il est de la forme :*

$$(3.1.2) \quad \mathbf{u} = C_1 \wedge \mathbf{r} + C_2,$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des vecteurs constants de  $\mathbf{R}^3$ .  $\square$

Ces déplacements sont des solutions triviales du système de flexion (3.1.1a). Ce sont donc des déplacements inextensionnels particuliers. On les appelle également déplacements rigides infinitésimaux car en théorie tri-dimensionnelle de l'élasticité linéarisé(\*) les déplacements dits "rigides infinitésimaux" sont des déplacements (sur un volume!) qui annulent le tenseur de déformation tri-dimensionnelle linéarisé et qui s'écrivent sous la forme  $\mathbf{u} = C_1 \wedge \mathbf{p} + C_2$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont des vecteurs constants de  $\mathbf{R}^3$  et  $\mathbf{p}$  désigne le vecteur position définissant le corps volumique considéré ; ils s'expriment donc de façon tout à fait analogue à (3.1.2). Il a été montré, d'autre part, que de tels déplacements sont les seules déformations à conserver à la fois la première et la seconde forme fondamentale de la surface, c'est le *lemme du mouvement rigide* de [Bernadou et Ciarlet,76]. Si  $S$  est encadrée sur une partie (de mesure  $> 0$ ) de son bord, on peut montrer que le seul déplacement trivial ou rigide infinitésimal admissible est le déplacement nul, c'est à dire que l'espace  $\mathbf{G}$  et l'espace  $\mathbf{G}$  quotienté par l'ensemble des déplacements triviaux ou rigides, coïncident dans ce cas.

---

(\*) On pourra consulter à ce sujet des manuels tels que "Elasticité tri-dimensionnelle" de P.G. Ciarlet ou "Mécanique des milieux continus" de G. Duvaut.

**3.1.4. Définition.** - Une surface (resp. une portion de surface) est dite [géométriquement] **rigide** ou [à flexion pure] **inhibée** si les seuls déplacements inextensionnels admissibles sont des déplacements rigides [inifinitésimaux].  $\square$

**3.1.5. Remarque.** - Nous ferons souvent l'abus de langage "une surface est inhibée ou rigide si  $\mathbf{G} = \{0\}$ " en voulant exprimer que  $\mathbf{G}$  se réduit à l'ensemble des déplacements rigides ; c'est à dire qu'on identifie abusivement  $\mathbf{G}$  et l'espace quotient  $\mathbf{G}/\{\text{déplacements rigides}\}$ .  $\square$

La notion de surface inhibée doit être nuancée avec la notion de surface rigide bien inhibée introduite dans [Sanchez-Palencia, 89], d'où nous avons adopté la terminologie de surface "à flexion pure inhibée". Soit  $\gamma(\mathbf{u})$ , le **tenseur de déformation linéarisé** de la surface<sup>(\*\*)</sup>, pour un déplacement  $\mathbf{u}$  de  $\mathbf{V}$  :

$$(3.1.3) \quad \gamma(\mathbf{u}) = 2\mathbf{du.dr.}$$

L'expression du tenseur de déformation linéarisé en coordonnées locales peut être obtenue d'après les expressions du système de flexion (équivalent à  $\gamma(\mathbf{u}) = 0$ ) en coordonnées locales, voir les expressions (3.2.6) et 3.2.9) de la section suivante.

**3.1.6. Définition.** - Une surface rigide est dite **bien inhibée** si il existe une constante  $c > 0$  telle que :

$$(3.1.4) \quad \|\gamma(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \geq c\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}. \quad \square$$

Un exemple classique de surface bien inhibée est une surface elliptique régulière ( $C^3$ ) sans bord ou, fixée ou encastree sur tout son bord, voir [Geymonat et Sanchez-Palencia,95] ou encore [Ciarlet et Sanchez-Palencia,95].

**3.1.7. Définition.** - Une surface rigide est dite **mal inhibée** si elle n'est pas bien inhibée.  $\square$

Autrement dit, les surfaces mal inhibées sont des surfaces inhibées pour lesquelles il existe une suite de déplacements de normes égales à 1 et dont la valeur du tenseur de déformation peut tendre vers 0, correspondant aux "Pseudo-Bendings" ou **pseudo-flexions** de [Goldenweizer, Lidskii et tovstik,79]. Nous y reviendrons dans la section 7 de ce chapitre.

---

(\*\*) A ne pas confondre avec le tenseur de déformation tri-dimensionnelle linéarisé d'un corps volumique.

Cette nuance (dans le cas d'une surface inhibée) joue un rôle fondamental en théorie des coques minces où le problème limite de la statique d'une coque élastique (lorsque l'épaisseur tend vers 0) est très différent suivant que la surface moyenne est mal ou bien inhibée. Le cas bien-inhibé conduit à un problème bien posé dans un espace classique, c'est le cas des coques membranaires, voir [Ciarlet et Sanchez-Palencia,93 et 95] et [Ciarlet et Lods,94]. Cependant le cas mal inhibée peut conduire à un *problème sensitif* ou à *sensibilité exacerbée*, selon la terminologie de J. L. LIONS et E. SANCHEZ-PALENCIA, voir [Lions et Sanchez-Palencia,94 et 95], signifiant une impossibilité pratique de calculs numériques fiables. Nous y reviendrons plus en détail au chapitre 5 de ce mémoire.

#### UN CAS PARTICULIER : DEPLACEMENT INEXTENSIONNEL D'UNE PORTION DE PLAN.

Nous commençons par le cas simple d'un plan où l'on peut expliciter les déplacements inextensionnels. C'est cependant un cas atypique dans la mesure où l'équation (3.2.7) - que nous explicitons dans la section suivante et qui caractérise dans un certain sens les déplacements inextensionnels- se réduit à l'équation triviale " $0 = 0$ ".

Soit P un plan, il peut être défini par un paramétrage du type :

$$(3.1.5) \quad \mathbf{r}(x_1, x_2) = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 = (x_1, x_2, 0).$$

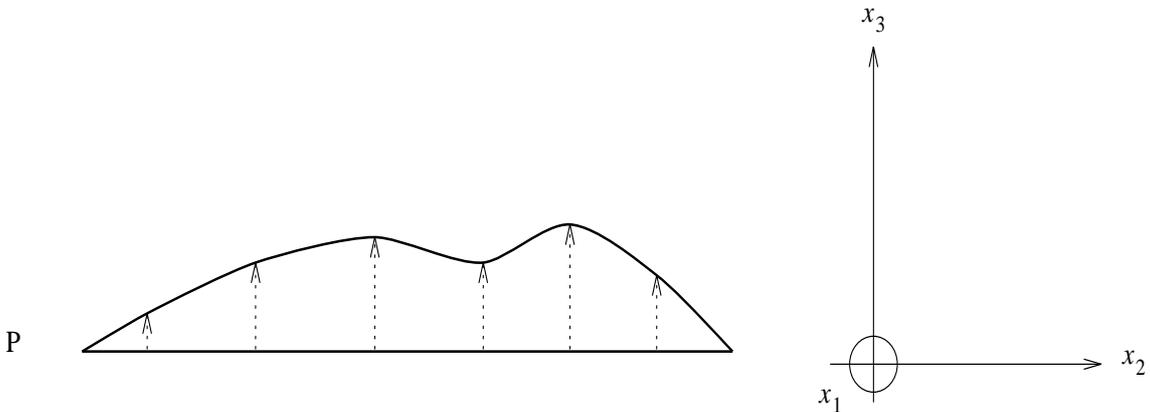
Soit  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  un déplacement inextensionnel sur le plan P ; les  $u_i$  désignent les composantes en coordonnées cartésiennes du déplacement  $\mathbf{u}$ . Le système de flexion (3.1.1a) s'écrit :

$$(3.1.6) \quad \begin{aligned} u_{1,1} &= 0 \\ u_{2,2} &= 0 \\ u_{1,2} + u_{2,1} &= 0 \end{aligned}$$

ce qui entraîne que  $(u_1, u_2)$  est un déplacement rigide dans le plan  $(0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , avec la composante "verticale" ou normale  $u_3$  restant arbitraire.

L'espace  $\mathbf{G}$  se réduit donc à l'espace des déplacements normaux au plan, modulo les déplacements rigides dans le plan (qu'on peut éventuellement supprimer en fixant le plan sur une partie de son bord, non réduit à un point).

**3.1.6. Remarque.** - Les déformations normales d'un plan (les seules déformations inextensionnelles, hormis les déplacements rigides) changent "visiblement" les longueurs. Mais comme pour la remarque concernant les déplacements rigides, il faut bien avoir à l'esprit que nous travaillons en théorie linéarisée.  $\square$



Champ de déplacement inextensionnel sur un plan P.

Figure 3.1.2.

**3.1.7. Remarque.** - *une surface plane n'est jamais rigide en théorie linéarisée.* C'est une conséquence immédiate du fait que le déplacement normal au plan est quelconque. C'est un fait qu'il est intéressant de comparer avec la théorie non-linéarisée des déplacements laissant la métrique invariante, dans laquelle il est clair qu'une surface plane fixée sur tout son bord n'admet que des déplacements modifiant les longueurs. Mais la non-rigidité linéaire d'une surface plane correspond bien à l'idée intuitive qu'on peut avoir d'une plaque très fine qui vibre très facilement, nous pouvons penser aux instruments de musique à percussion (tambour).  $\square$

### 3.2. LE SYSTEME DE FLEXION EN COORDONNEES LOCALES.

Dans la section précédente, sur une surface  $S = (\Omega, \mathbf{r})$ , nous avons caractérisé un déplacement inextensionnel comme un déplacement satisfaisant au système de flexion (3.1.1) ou encore sous une écriture "universelle" (3.1.1a) (puisque ne dépendant pas du système de coordonnées locales choisi). De façon classique, nous pouvons expliciter le système de flexion en coordonnées cartésiennes ou en coordonnées covariantes.

EXPRESSION DU SYSTEME DE FLEXION EN COORDONNEES CARTESIENNES. LE SYSTEME NON-KOWALESKIEN ET SON EQUATION EQUIVALENTE.

Soit  $S = (\Omega, \mathbf{r})$  une surface où  $\Omega$  est un ouvert connexe de  $\mathbf{R}^2$ . Etant donné un repère orthonormal  $(0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , on suppose que le paramétrage  $\mathbf{r}$  est de la forme :

$$(3.2.1) \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2 \quad \mathbf{r}(x_1, x_2) = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \varphi(x_1, x_2) \mathbf{e}_3.$$

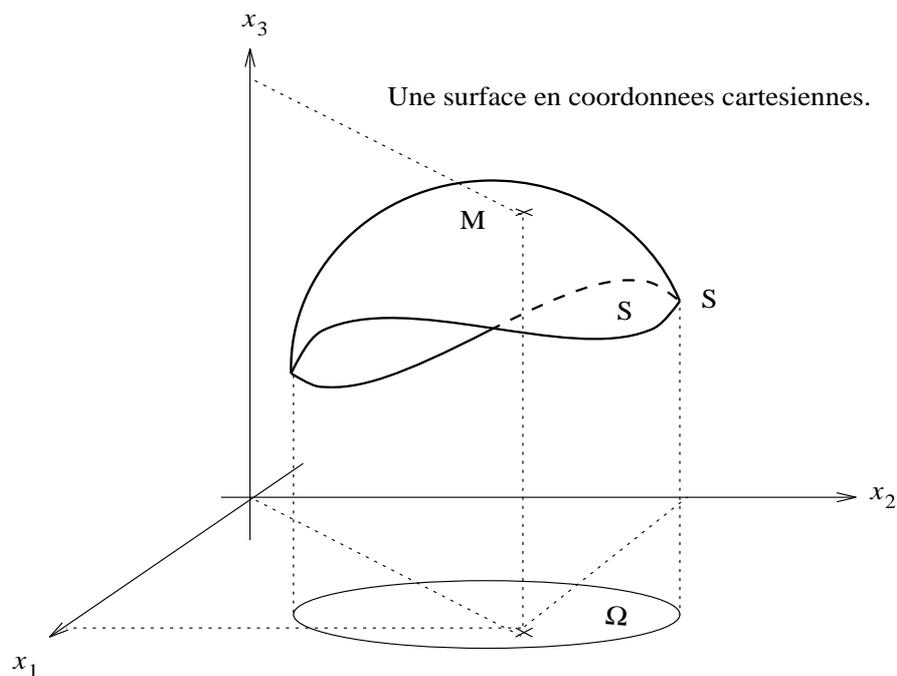


Figure 3.2.1

Le domaine  $\Omega$  est alors la projection orthogonale de la surface sur le plan  $(0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ .

La base covariante de la surface est donné par :

$$(3.2.2) \quad \mathbf{a}_1 = (1, 0, \varphi_{,1}), \quad \mathbf{a}_2 = (0, 1, \varphi_{,2}) \quad \mathbf{a}_3 = \frac{1}{a} (-\varphi_{,1}, -\varphi_{,2}, 1),$$

$$\text{où } a = \|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\| = (1 + \varphi_{,1}^2 + \varphi_{,2}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Les coefficients de la seconde forme fondamentale dans la base covariante se calculent alors facilement, nous avons :

$$(3.2.3) \quad b_{\alpha\beta} = - \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \rangle = \frac{\varphi_{,\alpha\beta}}{a}.$$

Soit  $\Gamma$  une courbe de la surface  $S$ , définie de façon implicite par une fonction  $\phi$  (définie sur  $\Omega$  à valeur dans  $\mathbf{R}$ ) :

$$\Gamma = \{[x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)] \text{ tels que } \phi(x_1, x_2) = 0, \text{ où } (x_1, x_2) \in \Omega\}.$$

D'après (2.3.4),  $\Gamma$  est une ligne asymptotique de  $S$  si :

$$(3.2.4) \quad (\phi_{,2})^2 \phi_{,11} - 2(\phi_{,1}\phi_{,2})\phi_{,12} + (\phi_{,1})^2 \phi_{,22} = 0.$$

Soit  $\mathbf{u}$  un déplacement inextensionnel sur la surface  $S$ . On l'exprime selon ses composantes cartésiennes :

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3.$$

De même, nous avons l'expression en coordonnées cartésiennes d'une dérivée partielle du déplacement  $\mathbf{u}$  :

$$(3.2.5) \quad \mathbf{u}_{,\alpha}(x_1, x_2) = u_{1,\alpha} \mathbf{e}_1 + u_{2,\alpha} \mathbf{e}_2 + u_{3,\alpha} \mathbf{e}_3.$$

Et en remplaçant les expressions (3.2.2) et (3.2.5) dans le système de flexion (3.1.1a) :

$$\langle \mathbf{u}_{,\alpha}, \mathbf{a}_\beta \rangle + \langle \mathbf{u}_{,\beta}, \mathbf{a}_\alpha \rangle = 0,$$

nous obtenons le système d'équation aux dérivées partielles du 1<sup>er</sup> ordre :

$$(3.2.6) \quad \begin{cases} u_{1,1} + \phi_{,1} u_{3,1} & = 0 \\ u_{2,2} + \phi_{,2} u_{3,2} & = 0 \\ u_{1,2} + u_{2,1} + \phi_{,1} u_{3,2} + \phi_{,2} u_{3,1} & = 0. \end{cases}$$

Le système d'E.D.P. (3.2.6) que nous appelons *système de flexion en coordonnées cartésiennes*, est d'ordre total 3 mais possède la propriété remarquable d'être *non-Kowaleskien*, i.e. toutes les courbes de  $\Omega$  sont caractéristiques (cf. remarque 1.1.8). C'est un simple calcul de le vérifier. Cependant il est intuitivement clair que le problème de Cauchy étant de se donner  $\mathbf{u}$  sur une courbe  $\Gamma$  pour déterminer le déplacement sur  $\Omega$  à partir de (3.2.6) quelle que soit  $\Gamma$ , une condition d'inextensibilité doit impérativement être vérifiée, autrement dit, le problème de Cauchy n'est pas libre quelle que soit la courbe  $\Gamma$ .

Le système différentiel (3.2.6) est en fait "équivalent" dans un certain sens à une équation aux dérivées partielles du second ordre en  $u_3$ . C'est un résultat classique, voir [Darboux,1896] ou [Hadamard,64]. Il suffit de considérer la troisième équation de

(3.2.6) et de la dériver successivement par rapport aux paramètres  $x_1$  et  $x_2$ , puis d'y retrancher la première équation de (3.2.6) qu'on aura dérivée deux fois par rapport au paramètre  $x_2$  et retrancher encore la seconde équation de (3.2.6) qu'on aura dérivée deux fois par rapport au paramètre  $x_1$ . Nous obtenons alors :

$$(3.2.7) \quad \varphi_{,22}u_{3,11} - 2\varphi_{,12}u_{3,12} + \varphi_{,11}u_{3,22} = 0.$$

C'est à dire que la composante verticale  $u_3$  d'une solution  $\mathbf{u}$  du système différentiel (3.2.6) est solution de l'équation différentielle du second ordre (3.2.7). Réciproquement, si  $u_3$  est une solution de (3.2.7), le système (3.2.6) permet de déterminer localement  $u_1$  et  $u_2$ , par une simple quadrature, modulo les solutions de :

$$u_{1,1} = 0, \quad u_{2,2} = 0 \quad \text{et} \quad u_{1,2} + u_{2,1} = 0 ;$$

c'est à dire modulo les déplacements rigides dans le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  (en particulier si  $u_3 \equiv 0$ , alors  $\mathbf{u}$  est un déplacement rigide dans le plan). Récapitulons :

**3.2.1. Proposition.** - Si  $\mathbf{u}$  est une solution de (3.2.6), alors  $u_3$  satisfait à (3.2.7). Réciproquement, si  $u_3$  est une solution de (3.2.7), alors on peut déterminer localement  $u_1$  et  $u_2$  [modulo un déplacement rigide infinitésimal dans le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ ] tels que  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  soit une solution locale de (3.2.6).  $\square$

On peut donc dire que le système d'EDP (3.2.6) est "équivalent" au sens de la proposition 3.2.1 à l'équation différentielle du second ordre (3.2.7). Remarquons qu'il n'y a pas d'incohérence malgré le fait que le système (3.2.6) soit d'ordre total 3, c'est parcequ'il est non-kowaleskien.

Par ailleurs, d'après l'expression 1.3.5, l'équation caractéristique de (3.2.7) pour une fonction  $\phi$  est :

$$(3.2.8) \quad (\phi_{,2})^2 \varphi_{,11} - 2(\phi_{,1}\phi_{,2})\varphi_{,12} + (\phi_{,1})^2 \varphi_{,22} = 0$$

En comparant alors (3.2.8) avec (3.2.4), nous pouvons énoncer :

**3.2.2. Proposition.** - Les courbes caractéristiques de (3.2.7) sont les lignes asymptotiques de la surface  $S$  [ou plutôt les lignes de  $\Omega$  définissant les lignes asymptotiques de  $S$  ; dans la suite, nous ferons systématiquement cet abus de langage].

Autrement dit : l'équation différentielle du second ordre (3.2.7), équivalente au système de flexion, sera respectivement de nature elliptique, parabolique ou hyperbolique suivant que la surface sera elliptique, parabolique ou hyperbolique.

**3.2.3. Remarque.** - La proposition 3.2.2 donne un aspect fondamental du problème des déplacements inextensionnels, à savoir que la géométrie de la surface intervient de façon essentielle dans leur étude. Cela montre aussi l'extrême variétés des cas possibles qui rend difficile une étude systématique.  $\square$

#### EXPRESSION DU SYSTEME DE FLEXION EN COORDONNEES COVARIANTES.

Soit  $S = (\Omega, \mathbf{r})$  une surface. Soit  $\mathbf{u} \in \mathbf{G}$  un déplacement inextensionnel sur  $S$ . Nous choisissons ici d'exprimer  $\mathbf{u}$  suivant ses composantes covariantes (c'est à dire, nous l'exprimons dans la base contravariante) :

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{a}^1 + u_2 \mathbf{a}^2 + u_3 \mathbf{a}^3 .$$

Les dérivées partielles de  $\mathbf{u}$  s'écrivent alors en coordonnées covariantes suivant la formule (2.1.13), dérivée des formules de Gauss et Weingarten (2.1.12), que nous rappelons :

$$\mathbf{u}_{,\alpha} = \left( u_{1,\alpha} - \Gamma_{1\alpha}^{\lambda} u_{\lambda} - b_{1\alpha} u_3 \right) \mathbf{a}^1 + \left( u_{2,\alpha} - \Gamma_{2\alpha}^{\lambda} u_{\lambda} - b_{2\alpha} u_3 \right) \mathbf{a}^2 + \left( u_{3,\alpha} - b_{\alpha}^{\lambda} u_{\lambda} \right) \mathbf{a}^3 .$$

Si bien qu'en remplaçant dans l'expression "universelle" du système de flexion (3.1.1a), nous obtenons le système aux dérivées partielles :

$$(3.2.9) \quad \begin{cases} u_{1,1} - \Gamma_{11}^{\lambda} u_{\lambda} - b_{11} u_3 & = 0 \\ u_{2,2} - \Gamma_{22}^{\lambda} u_{\lambda} - b_{22} u_3 & = 0 \\ \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) - \Gamma_{12}^{\lambda} u_{\lambda} - b_{12} u_3 & = 0. \end{cases}$$

Le système différentiel (3.2.9) est un système d'E.D.P. linéaire du 1<sup>er</sup> ordre, nous l'appelons *système de flexion en coordonnées covariantes*. C'est un système différentiel d'ordre total 2. En effet, (3.2.9) n'implique pas de dérivée de la composante normale  $u_3$ .

Choisissons une carte définissant  $S$  telle que les courbes coordonnées soient des *courbes principales orthogonales*, comme cela est toujours possible d'après la proposition 2.4.4. Dans un tel système de coordonnées, le coefficient (de la seconde

forme fondamentale)  $b_{12}$  est nul. On peut alors "éliminer" l'inconnue  $u_3$  en combinant la première équation de (3.2.9) dans la deuxième (ou vice-versa). On obtient un système de deux équations aux dérivées partielles à deux inconnues :

$$(3.2.10) \quad \begin{aligned} u_{1,2} + u_{2,1} &= 2\Gamma_{12}^\lambda u_\lambda \\ b_{22}u_{1,1} - b_{11}u_{2,2} &= (b_{22}\Gamma_{11}^\lambda - b_{11}\Gamma_{22}^\lambda)u_\lambda. \end{aligned}$$

Nous appellerons (3.2.10), le système de flexion [en coordonnées principales] *réduit*. Connaissant  $u_1$  et  $u_2$  solutions du système différentiel (3.2.10), la première ou la seconde équation de (3.2.9) permet de déterminer la composante normale  $u_3$ . On détermine ainsi une solution du système de flexion (3.2.9), c'est à dire un déplacement inextensionnel.

Une courbe  $\Gamma = \{(y^1, y^2) / \phi(y^1, y^2) = 0\}$  est une courbe caractéristique de (3.2.10) si :

$$(3.2.11) \quad (\phi_{,2})^2 b_{22} + (\phi_{,1})^2 b_{11} = 0.$$

Nous reconnaissons, en (3.2.11), une équation définissant les lignes asymptotiques de  $S$  (avec  $b_{12} = 0$ ). Ainsi le système de flexion (3.2.9) est équivalent à un système d'EDP d'ordre total 2 et qui est de nature hyperbolique ou elliptique selon que la surface  $S$  est hyperbolique ou elliptique, ce qui est naturellement consistant avec la proposition 3.2.2.

#### CAS D'UNE SURFACE HYPERBOLIQUE.

Soit  $S$  une surface uniformément *hyperbolique* définie par une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$  telle que les courbes coordonnées soient les lignes asymptotiques de  $S$ , d'après la proposition 2.4.3, les coefficients de la seconde forme fondamentale  $b_{\alpha\beta}$  se simplifient :

$$(3.2.12) \quad b_{11} = b_{22} = 0 \quad \text{et} \quad b_{12} \neq 0.$$

Le système de flexion en coordonnées covariantes (3.2.9) se réduit alors :

$$(3.2.13) \quad \begin{cases} u_{1,1} - \Gamma_{11}^\lambda u_\lambda &= 0 \\ u_{2,2} - \Gamma_{22}^\lambda u_\lambda &= 0 \\ \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) - \Gamma_{12}^\lambda u_\lambda &= b_{12}u_3. \end{cases}$$

Nous constatons que les deux premières équations de (3.2.13) forment un système linéaire d'EDP hyperbolique sous sa forme dite *diagonale*. La troisième équation (3.2.13) permettant de déterminer la composante normale  $u_3$ , à partir des composantes tangentielles  $u_1$  et  $u_2$ .

## CAS D'UNE SURFACE ELLIPTIQUE.

Dans le cas d'une surface uniformément elliptique, nous avons rappelé précédemment (proposition 3.2.1) que le système de flexion en coordonnées cartésiennes (3.2.6) est équivalent dans un certain sens à une équation différentielle du second ordre elliptique. De façon analogue le système de flexion en coordonnées covariantes (3.2.9) est équivalent au système (3.2.10) qui est alors elliptique.

En choisissant un système de coordonnées isométriques conjuguées, d'après la proposition 2.4.2, les coefficients de la seconde forme fondamentale se simplifient :

$$b_{11} = b_{22} \text{ et } b_{12} = 0,$$

et le système de flexion en coordonnées covariantes devient :

$$(3.2.14) \quad \begin{cases} u_{1,1} &= \Gamma_{11}^\lambda u_\lambda + b_{11} u_3 \\ u_{2,2} &= \Gamma_{22}^\lambda u_\lambda + b_{22} u_3 \\ u_{1,2} + u_{2,1} &= 2\Gamma_{12}^\lambda u_\lambda. \end{cases}$$

En soustrayant la première équation de (3.2.14) par la seconde et en reprenant la troisième, nous obtenons le système différentiel à deux inconnues :

$$(3.2.15) \quad \begin{cases} u_{1,1} - u_{2,2} &= \Gamma_{11}^\lambda u_\lambda - \Gamma_{22}^\lambda u_\lambda \\ u_{1,2} + u_{2,1} &= 2\Gamma_{12}^\lambda u_\lambda. \end{cases}$$

Si bien qu'en posant :  $w = u_1 + iu_2$ , et  $z = y^1 + iy^2$  (où  $i$  est le nombre complexe imaginaire pure  $i^2 = -1$ ), nous avons :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y^1} - i \frac{\partial w}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial w}{\partial y^1} + i \frac{\partial w}{\partial y^2}.$$

si bien que le système (3.2.14) est équivalent à l'équation différentielle :

$$(3.2.16) \quad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = Aw + B\bar{w},$$

avec

$$A = \frac{1}{2}[\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 + 2\Gamma_{12}^2 + 2i\Gamma_{12}^1 - i\Gamma_{11}^2 + i\Gamma_{22}^2] \quad B = \frac{1}{4}[\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 - 2\Gamma_{12}^2 + 2i\Gamma_{12}^1 + i\Gamma_{11}^2 - i\Gamma_{22}^2].$$

Par *définition*, une solution de (3.2.16) est une fonction *pseudo-analytique* ou *analytique généralisée*<sup>(\*)</sup>, qui possèdent de nombreuses propriétés analogues à des fonctions analytiques. C'est la théorie développée par I. N. VEKUA dans sa monographie "Generalised analytic functions" permettant d'obtenir des cas de rigidification pour certaines surface elliptiques, notamment des cas avec des plis sur tout le bord (voir la proposition 4.3.3).

Il nous faut indiquer également que le système (3.2.9) est elliptique au sens de Douglis et Nirenberg, théorie que nous ne ferons qu'évoquer dans ce mémoire (voir [Douglis and Nirenberg,1958]). Cet aspect du système de flexion a été développé dans [Geymonat et Sanchez-Palencia,91 et 95], proposition 3.1. Nous en citons des résultats d'inhibition et de quasi-inhibition des surfaces elliptiques tels que :

**3.2.3. Proposition.** - *Un ovoïde sans bord est bien inhibée.*  $\square$

**3.2.4. Proposition.** - *Une surface elliptique avec une des conditions sur tout son bord a, b, c, d, e ou f :*

$$\text{a) } u_t = g ; \text{ b) } u_v = g ; \text{ c) } u_3 = g ; \text{ d) } \partial_v u_t = g ; \text{ e) } \partial_v u_v = g ; \text{ f) } \partial_v u_3 = g$$

*est quasi-inhibée, c'est à dire, l'espace des déplacements inextensionnels est de dimension finie.*  $\square$

Le cas d'une surface dont tout les points sont paraboliques est étudié à part, dans la section 6 de ce chapitre : c'est le cas des surfaces développables pour lesquelles nous expliciterons l'expression générale d'un déplacement inextensionnel (cf. proposition 3.6.1).

### 3.3. REGULARITE D'UN DEPLACEMENT INEXTENSIONNEL.

Soit  $S = (\Omega, \mathbf{r})$  une surface et  $\mathbf{G}$  l'espace des déplacements inextensionnels sur  $S$ . Les déplacements sur une surface sont a priori définis dans l'espace de Sobolev  $H^1 \times H^1 \times H^2$ . Nous allons voir que les expressions en coordonnées locales du système de flexion (3.1.1) permettent d'obtenir une régularité plus grande (voir [Geymonat et Sanchez-Palencia,95]).

---

<sup>(\*)</sup> Voir [Courant-Hilbert] pour un exposé introductif, nous renvoyons également à [Bers,53].

**3.3.1. Proposition.** Soit  $\mathbf{u} \in \mathbf{G}$ ,  $\mathbf{u} \in H^1 \times H^1 \times H^2(\Omega)$  alors  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$  .  $\square$

*Preuve :* Le système de flexion en coordonnées covariantes (3.2.9) nous donne facilement les estimations :

$$u_{1,1} \in H^1(\Omega), \quad u_{2,2} \in H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad (u_{1,2} + u_{2,1}) \in H^1(\Omega),$$

ce qui entraîne :

$$u_{1,11} \in L^2(\Omega), \quad u_{2,21} \in L^2(\Omega),$$

$$u_{1,12} \in L^2(\Omega), \quad u_{2,22} \in L^2(\Omega),$$

$$(u_{1,21} + u_{2,11}) \in L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad (u_{1,22} + u_{2,12}) \in L^2(\Omega).$$

En combinant les dernières relations, nous obtenons de plus :

$$u_{1,22} \in L^2(\Omega)$$

$$u_{2,11} \in L^2(\Omega),$$

d'où :

$$u_{1,2} \in H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad u_{2,1} \in H^1(\Omega).$$

Autrement dit nous avons montré que  $u_1 \in H^2(\Omega)$  et  $u_2 \in H^2(\Omega)$ , et donc  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ . ■

**3.3.2. Remarque.** - En réitérant le procédé de la proposition 3.3.1 et en utilisant un lemme de Deny-Lions<sup>(\*)</sup> nous obtenons une régularité supplémentaire  $\mathbf{u} \in H^3 \times H^3 \times H^2$ .  $\square$

Nous pouvons redéfinir l'espace des déplacements inextensionnels par :

$$(3.3.1) \quad \mathbf{G} = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega) / d\mathbf{u}.d\mathbf{r} = 0 \}.$$

Dans le cas d'une surface uniformément elliptique, l'équation différentielle (3.2.7) est alors de nature elliptique. Une solution de l'équation (3.2.7) (la composante verticale) est alors aussi régulière que  $S$  dans  $\Omega$  (cf. théorème 1.3.4). D'autre part, il est clair qu'il est toujours possible de trouver, localement, trois systèmes de coordonnées

---

<sup>(\*)</sup> Lemme de Deny-Lions : Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  et soit  $f \in H^1(\Omega)$  telle que  $\partial_i f \in H^1(\Omega)$  alors  $f \in L^2(\Omega)$ , voir [Deny et Lions,57] ou encore [Amrouche et Girault,92].

cartésiennes tels que les composante "verticales" correspondantes forment une base de  $\mathbf{R}^3$ , ainsi nous avons :

**3.3.3. Proposition.** - Soit  $S = (\Omega, \mathbf{r})$  une portion de surface uniformément elliptique de classe  $C^m$ ,  $m \geq 0$ . Soit  $\mathbf{u}$  un déplacement inextensionnel sur  $S$ , alors  $\mathbf{u}$  est de classe  $C^m$  dans tout ouvert suffisamment régulier contenu dans  $\Omega$ .  $\square$

**3.3.4. Remarque.** - Il faut noter que la propriété de régularité est locale, si bien qu'un déplacement inextensionnel sera d'autant plus régulier dans une partie de  $S$  plus régulière.  $\square$

Dans le cas d'une surface hyperbolique, la régularité  $H^3 \times H^3 \times H^2$  ne peut pas être amélioré, même à l'intérieur et même si la surface est très régulière, en effet, d'après la remarque 1.2.11, il est propre aux systèmes (strictement) hyperboliques linéaires (penser à l'équation des ondes) de "transporter" et donc de conserver la régularité de la donnée de Cauchy pour les solutions d'un problème de Cauchy, ce qui peut être le cas d'un déplacement inextensionnel. Cependant la trace sur une courbe des dérivées secondes d'un déplacement sur une surface hyperbolique peut avoir un sens :

**3.3.5. Proposition.** - Soit  $S = (\Omega, \mathbf{r})$  une surface uniformément hyperbolique et soit  $\Gamma$  une courbe de  $S$  transversale aux lignes asymptotiques de  $S$ . Soit  $\mathbf{u}$  un déplacement inextensionnel sur  $S$ . Alors  $\mathbf{u}$  et ses dérivées partielles d'ordre inférieur ou égale à 2 ont un sens dans  $L^2(\Gamma)$ .  $\square$

Nous renvoyons à [Geymonat et Sanchez-Palencia, 95] pour une preuve de la proposition 3.3.5, mais nous montrerons dans la proposition 3.5.7 un résultat de trace analogue concernant des éléments de l'espace  $\mathbf{R}(S)$  (isomorphe à  $\mathbf{G}$  que nous introduisons dans la section 5 de ce chapitre).

La régularité des déplacements inextensionnels sur une surface développable est traitée indépendamment à la section 6 de ce chapitre.

### **3.4. CHAMP DE ROTATION INFINITESIMALE ASSOCIE A UN DEPLACEMENT INEXTENSIONNEL. CRITERE DE RIGIDITE.**

Soit  $S$  une surface définie avec une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$ . Soit  $\mathbf{u} \in \mathbf{G}$ , un déplacement inextensionnel.  $\mathbf{u}$  définit de façon classique (voir [Darboux, 1894], [Vekua, 59] ou [Spivak, 75]) un champs  $\omega$  satisfaisant à :

$$(3.4.1) \quad d\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \wedge d\mathbf{r}.$$

C'est à dire :

$$(3.4.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}_{,1} &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{u}_{,2} &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{a}_2. \end{aligned}$$

De façon plus précise :

**3.4.1. Proposition et définition.** - Soit  $\mathbf{u}$  un déplacement inextensionnel de  $\mathbf{G}$ . Il existe une unique champ  $\boldsymbol{\omega}$  tel qu'on ait (3.4.2). C'est le **champ de rotation infinitésimale associé à  $\mathbf{u}$** . De plus, le champ  $\boldsymbol{\omega}$  satisfait à la relation :

$$(3.4.3) \quad \boldsymbol{\omega}_{,1} \wedge \mathbf{a}_2 = \boldsymbol{\omega}_{,2} \wedge \mathbf{a}_1,$$

et nous avons l'expression explicite :

$$(3.4.4) \quad \begin{cases} \omega^1 = \frac{1}{a} [u_{3,2} - b_2^\gamma u_\gamma] \\ \omega^2 = \frac{1}{a} [u_{3,1} - b_1^\gamma u_\gamma] \\ \omega^3 = \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{2} (u_{2,1} - u_{1,2}) - \Gamma_{12}^\gamma u_\gamma - b_{12} u_3 \right]. \end{cases} \quad \square$$

Où les  $\omega^i$  désignent les composantes contravariantes du champ de rotation  $\boldsymbol{\omega} = \omega^i \mathbf{a}_i$ , les  $u_j$  désignent les composantes covariantes du déplacement  $\mathbf{u} = u_j \mathbf{a}^j$ , et  $a = \|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|$  et les  $b_\beta^\alpha$  sont les coefficients une fois covariant et une fois contravariant de la seconde forme fondamentale (cf. (2.1.8)).

*Preuve* : Montrons d'abord l'unicité du champ de rotation associé : soient  $\boldsymbol{\omega}_1$  et  $\boldsymbol{\omega}_2$  deux champs satisfaisant à (3.4.2) pour un même déplacement  $\mathbf{u}$ , alors (3.4.2) entraîne immédiatement :

$$(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) \wedge \mathbf{a}_1 = (\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) \wedge \mathbf{a}_2 = 0.$$

Si bien que nous avons :  $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2$ .

En écrivant l'égalité de Schwarz :  $\mathbf{u}_{,12} = \mathbf{u}_{,21}$ , les relations (3.4.2) induisent immédiatement la relation (3.4.3).

Enfin, pour obtenir l'expression explicite (3.4.4) de  $\omega$  en fonction de  $\mathbf{u}$ , il suffit de développer, toujours dans (3.4.2) les dérivées partielles  $\mathbf{u}_{,\alpha}$  suivant leurs composantes covariantes et développer  $\omega$  suivant ses composantes contravariantes. On obtient :

$$(3.4.5) \quad (u_{\lambda,\alpha} - \Gamma_{\lambda\alpha}^{\gamma} u_{\gamma} - b_{\alpha\lambda} u_3) \mathbf{a}^{\lambda} + (u_{3,\alpha} - b_{\alpha}^{\gamma} u_{\gamma}) \mathbf{a}_3 = (\omega^i \mathbf{a}_i) \wedge \mathbf{a}_{\alpha}.$$

Il suffit alors d'identifier chaque terme de (3.4.5) suivant la base contravariante. ■

**3.4.2. Remarque.** - Un champ défini par la formule (3.4.4) apparaît dans l'expression de la variation  $\rho(\mathbf{u})$  de la seconde forme fondamentale (voir [Ciarlet et Bernadou,75]). Mais le champ alors défini n'est bien entendu pas un champ de rotation infinitésimale au sens de (3.4.1) si le déplacement à partir duquel il a été défini n'est pas inextensionnel.

□

**3.4.3. Remarque.** - L'expression (3.4.4) indique qu'un champ de rotation infinitésimale est dans  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ , et donne facilement les estimations suivantes :

$$(3.4.6) \quad \|\omega\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left[ \|u_3\|_{H^1(\Omega)} + \|u_1\|_{L^2(\Omega)} + \|u_2\|_{L^2(\Omega)} \right],$$

$$(3.4.7) \quad \|\omega_{,\alpha}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\mathbf{u}\|_{H^1 \times H^1 \times H^2(\Omega)},$$

avec une constante  $C > 0$  dépendant de la surface ; on peut prendre :

$$C = \sup_{\Omega} \{b_{12}, b_{\alpha}^{\beta}, \Gamma_{12}^{\lambda}\} \times \sup_{\Omega} \left(\frac{1}{a}\right).$$

D'autre part, d'après la proposition 3.3.1, nous savons qu'un déplacement inextensionnel appartient à l'espace de Sobolev  $\mathbf{H}^2(\Omega)$ , si bien que nous avons de plus :

$$(3.4.8) \quad \|\omega\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)}. \quad \square$$

D'après la remarque 3.4.3 nous pouvons définir l'espace  $\mathbf{W}$  des champs de rotation infinitésimale sur  $S$  (ou sur  $\Omega$ ) par :

$$\mathbf{W} = \{ \omega \in \mathbf{H}^1(\Omega) \quad / \quad \omega_{,1} \wedge \mathbf{a}_2 = \omega_{,2} \wedge \mathbf{a}_1 \}.$$

Cette définition est justifiée par une réciproque à la proposition 3.4.1 :

**3.4.4. Proposition :** *Soit  $\omega$  un champ de rotation infinitésimale de  $\mathbf{W}$ .  $\omega$  détermine un déplacement inextensionnel  $\mathbf{u}$  de façon unique modulo un déplacement rigide. On a l'expression explicite :*

$$(3.4.9) \quad \mathbf{u}(y^1, y^2) = \int_0^{y^1} \boldsymbol{\omega}_{,1}(t, y^2) \wedge [\mathbf{r}(y^1, y^2) - \mathbf{r}(t, y^2)] dt + \int_0^{y^2} \boldsymbol{\omega}_{,2}(0, s) \wedge [\mathbf{r}(y^1, y^2) - \mathbf{r}(0, s)] ds$$

+ *déplacement rigide.*  $\square$

Nota : Les champs de rotation infinitésimale étant des éléments de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ , la trace d'une dérivée de  $\boldsymbol{\omega}$  n'a pas de sens a priori. L'expression (3.4.9) doit être considéré comme l'opérateur intégral défini en (3.4.9) pour des fonctions continues de classe  $C^1$  prolongé de manière classique par continuité de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , comme dans le lemme 1.2.10. On commet alors un abus d'écriture en gardant les mêmes notations.  $\square$

*Preuve de la proposition 3.4.4* : Soient  $\boldsymbol{\omega}$  un champ de rotation infinitésimale et  $\mathbf{u}$  un champs de déplacement tels que les deux équations de (3.4.2) soient satisfaites. Il est alors facile de vérifier que  $\mathbf{u}$  satisfait au système de flexion (3.1.1a), définissant ainsi un déplacement inextensionnel.

Pour obtenir (3.4.9) nous opérons par une simple quadrature. En intégrant de façon formelle dans (3.4.2), il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(y^1, y^2) &= \int_0^{y^1} [\boldsymbol{\omega}(\hat{y}^1, y^2) \wedge \mathbf{r}_{,1}(\hat{y}^1, y^2)] d\hat{y}^1 + \mathbf{u}(0, y^2) \\ &= \int_0^{y^2} [\boldsymbol{\omega}(y^1, \hat{y}^2) \wedge \mathbf{r}_{,2}(y^1, \hat{y}^2)] d\hat{y}^2 + \mathbf{u}(y^1, 0). \end{aligned}$$

ou encore :

$$\mathbf{u}(y^1, y^2) = \int_0^{y^1} [\boldsymbol{\omega}(\hat{y}^1, y^2) \wedge \mathbf{r}_{,1}(\hat{y}^1, y^2)] d\hat{y}^1 + \int_0^{y^2} [\boldsymbol{\omega}(0, \hat{y}^2) \wedge \mathbf{r}_{,2}(0, \hat{y}^2)] d\hat{y}^2 + \mathbf{u}(0, 0).$$

En intégrant alors par partie, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(y^1, y^2) &= [\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}(y^1, y^2)] - \int_0^{y^1} [\boldsymbol{\omega}_{,1}(\hat{y}^1, y^2) \wedge \mathbf{r}(\hat{y}^1, y^2)] d\hat{y}^1 \\ &\quad - [\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}(0, 0)] - \int_0^{y^2} [\boldsymbol{\omega}_{,2}(0, \hat{y}^2) \wedge \mathbf{r}(0, \hat{y}^2)] d\hat{y}^2 + \mathbf{u}(0, 0). \end{aligned}$$

Mais on a, en développant  $\boldsymbol{\omega}(y^1, y^2)$  :

$$\boldsymbol{\omega}(y^1, y^2) = \int_0^{y^1} \boldsymbol{\omega}_{,1}(\hat{y}^1, y^2) d\hat{y}^1 + \boldsymbol{\omega}(0, y^2) = \int_0^{y^1} \boldsymbol{\omega}_{,1}(\hat{y}^1, y^2) d\hat{y}^1 + \int_0^{y^2} \boldsymbol{\omega}_{,2}(0, \hat{y}^2) d\hat{y}^2 + \boldsymbol{\omega}(0, 0)$$

pour finalement obtenir :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(y^1, y^2) &= \int_0^{y^1} \boldsymbol{\omega}_{,1}(\hat{y}^1, y^2) \wedge [\mathbf{r}(\hat{y}^1, y^2) - \mathbf{r}(\hat{y}^1, y^2)] d\hat{y}^1 + \int_0^{y^2} \boldsymbol{\omega}_{,2}(0, \hat{y}^2) \wedge [\mathbf{r}(y^1, y^2) - \mathbf{r}(0, \hat{y}^2)] d\hat{y}^2 \\ &\quad + \boldsymbol{\omega}(0, 0) \wedge [\mathbf{r}(y^1, y^2) - \mathbf{r}(0, 0)] + \mathbf{u}(0, 0). \end{aligned}$$

L'expression " $\omega(0,0) \wedge [\mathbf{r}(y^1, y^2) - \mathbf{r}(0,0)] + \mathbf{u}(0,0)$ " correspondant à un déplacement rigide. ■

**3.4.5. Remarque.** - L'expression (3.4.9) n'est pas unique (bien que le déplacement inextensionnel le soit, à un déplacement rigide près). On peut choisir un chemin différent et par exemple prendre l'expression :

$$(3.4.9a) \quad \mathbf{u}(y^1, y^2) = \int_0^{y^1} \omega_{,1}(t, 0) \wedge [\mathbf{r}(y^1, y^2) - \mathbf{r}(t, 0)] dt + \int_0^{y^2} \omega_{,2}(y^1, s) \wedge [\mathbf{r}(y^1, y^2) - \mathbf{r}(y^1, s)] ds.$$

+ déplacement trivial.

La relation (3.4.3) assure l'indépendance de l'intégration par rapport au "chemin" choisi. On peut même combiner ces deux chemins, ce qui donnerait une expression explicite valable pour des formes plus complexes de  $\Omega$  (non convexe par exemple, ou avec un trou). □

#### CRITERES DE RIGIDITE D'UNE SURFACE.

La proposition 3.4.4, induit un critère de rigidité d'une surface :

**3.4.6. Proposition.** - Soit  $S$  une surface (resp. une portion de surface) et  $\mathbf{u}$  un déplacement inextensionnel de  $S$ .  $\mathbf{u}$  est un déplacement rigide infinitésimal si et seulement si le champ de rotation infinitésimale  $\omega$  qui lui est associé est constant sur  $S$ .

*Preuve :* D'après (3.4.9) il est clair que si  $\omega$  est constant, alors  $\mathbf{u}$  est un déplacement rigide. Réciproquement si  $\mathbf{u}$  est un déplacement rigide, alors par définition, son champ de rotation associé est constant. ■

Nous pouvons aller plus loin dans le même raisonnement pour obtenir un critère de rigidité d'une courbe d'une surface :

**3.4.7. Proposition.** - Soit  $\Gamma$  une courbe de  $S$ . Soient un déplacement inextensionnel  $\mathbf{u}$  et son champ de rotation infinitésimale associé  $\omega$ , si la restriction à  $\Gamma$  de  $\omega$  est constant le long de  $\Gamma$ , alors  $\mathbf{u}$  est un déplacement rigide sur  $\Gamma$ .

*Preuve :* Sans perte de généralité, nous choisissons une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$  de  $S$  tel que la courbe  $\Gamma$  soit la courbe coordonnée  $\Gamma = \{\mathbf{r}(y^1, y^2 = 0)\}$ . Soient  $\mathbf{u}$  un déplacement inextensionnel et  $\omega$  le champ de rotation infinitésimale associé. Si  $\omega$  est constant le long de  $\Gamma$  alors la relation (3.4.2) :

$$\mathbf{u}_{,1} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{a}_1$$

s'intègre le long de  $\Gamma$  pour donner :

$$(3.4.10) \quad \mathbf{u}(y^1, 0) = \boldsymbol{\omega} \wedge [\mathbf{r}(y^1, 0) - \mathbf{r}(0, 0)].$$

C'est à dire que  $\mathbf{u}$  est un déplacement rigide sur  $\Gamma$ . ■

**3.4.8. Remarque.** - Le critère de rigidité d'une courbe de la proposition 3.4.7, est suffisante mais n'est pas nécessaire en général. Pour obtenir (3.4.10) il suffit que les composantes non-parallèles à  $\mathbf{a}_1$  du champ de rotation  $\boldsymbol{\omega}$  soient constantes, mais la composante parallèle à  $\mathbf{a}_1$  peut être non-constante. Le cas d'une surface réglée donne un exemple où on peut montrer que les génératrices se comportent comme des droites rigides sans que pour autant les champs de rotation soient constants le long des génératrices, voir la remarque 3.6.3. □

**3.4.9. Remarque.** - Le critère de rigidité de la proposition 3.4.7 peut être également décrite sur les dérivées partielles d'un champ de rotation (sous réserve que  $\mathbf{u}$  soit suffisamment régulière) : si la dérivée dans la direction tangente d'une courbe de tous les champs de rotation infinitésimale est nulle, alors la courbe est rigide. □

### 3.5. L'ESPACE $\mathbf{R}(S)$ DES DERIVEES PREMIERES DE CHAMPS DE ROTATION INFINITESIMALE.

Soient  $S = (\Omega, \mathbf{r})$  une surface,  $\mathbf{G}$  l'espace des déplacements inextensionnels sur  $S$  et  $\mathbf{W}$  l'espace des champs de rotation infinitésimale, comme dans la section précédente.

D'après l'expression (3.4.9) de la proposition 3.4.4, les dérivées partielles d'un champ de rotation  $\boldsymbol{\omega}$  suffisent à décrire un déplacement inextensionnel  $\mathbf{u}$  à un déplacement rigide près. D'après la remarque 3.4.9, nous pouvons exprimer le critère de rigidité d'une courbe avec une condition sur la dérivée du champ de rotation infinitésimale. Ce sont ces objets (dérivées partielles de champ de rotation et dont nous désignons l'ensemble par  $\mathbf{R}(S)$ ) non-classiques qui vont nous permettre d'établir des théorèmes de rigidité pour des surfaces hyperboliques et développables, que nous allons étudier plus en détail. Ce qui suit dans ce mémoire concernant les éléments de  $\mathbf{R}(S)$ , est donc original. Ces objets ont été introduits par l'auteur dans [Choï,93] ; ce sont toutefois des objets analogues aux champs statiques ou champs de flexion ("statics fields" ou "bending fields" en anglais) définis dans [Vekua,59] p.423-450. Cette étude est de plus

motivée par la proposition suivante qui concerne la propriété de tangence à la surface des dérivées de  $\omega$  :

**3.5.1. Proposition.** *Soit  $\omega \in \mathbf{W}$ , un champ de rotation infinitésimale sur une surface  $S$ . Alors la composante normale à la surface des dérivées partielles premières de  $\omega$  est nulle. Autrement dit : la différentielle de  $\omega$  est tangente à la surface, en tout point.  $\square$*

*Preuve :* Il suffit de faire le produit scalaire des deux membres de l'égalité (3.4.3) avec  $\mathbf{a}_1$  (resp.  $\mathbf{a}_2$ ) pour obtenir :

$$\langle [\omega_{,1} \wedge \mathbf{a}_2], \mathbf{a}_1 \rangle = \langle [\omega_{,2} \wedge \mathbf{a}_1], \mathbf{a}_1 \rangle = 0,$$

ce qui entraîne :

$$\langle \omega_{,1}, [\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2] \rangle = 0; \text{ (resp. : } \langle \omega_{,2}, [\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2] \rangle = 0). \blacksquare$$

**3.5.2. Remarque.** - Cette propriété, essentielle pour la suite, n'est en soi pas surprenante, dans la mesure où, intuitivement, un déplacement inextensionnel est une flexion de la surface ; flexion qui peut être provoquée par une " action " normale à la surface, tandis que une " action " tangentielle aurait tendance à étirer la surface et donc de modifier les longueurs.  $\square$

Soit  $\omega$  un champ de rotation infinitésimale sur  $S$ , en posant  $\mathbf{w}_1 = \omega_{,1}$  et  $\mathbf{w}_2 = \omega_{,2}$ , la relation (3.4.3) devient :

$$\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{a}_2 = \mathbf{w}_2 \wedge \mathbf{a}_1,$$

et les champ  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$  vérifient la condition d'intégrabilité (au sens des distributions):

$$\mathbf{w}_{1,2} = \mathbf{w}_{2,1}.$$

Nous définissons l'espace  $\mathbf{R}(S)$  représentant les dérivées partielles d'un champ de rotation infinitésimale :

**3.5.3. Définition.** -

$$\mathbf{R}(S) = \{(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in [L^2(\Omega)]^2 \text{ tels que } \mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{a}_2 = \mathbf{w}_2 \wedge \mathbf{a}_1 \text{ et } \mathbf{w}_{1,2} = \mathbf{w}_{2,1}\}. \square$$

D'après la proposition 3.4.1, un déplacement inextensionnel  $\mathbf{u} \in \mathbf{G}$  définit un unique champ de rotation infinitésimale  $\omega$  par l'expression (3.4.4). De fait, en considérant les dérivées partielles de  $\omega$ , à tout  $\mathbf{u} \in \mathbf{G}$  il correspond, de cette façon, un

unique couple  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$  de  $\mathbf{R}(S)$ . Nous avons ainsi défini une application de  $\mathbf{G}$  dans  $\mathbf{R}(S)$  que nous notons  $R$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &\xrightarrow{R} \mathbf{R}(S) \\ \mathbf{u} &\longrightarrow R(\mathbf{u}) = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2). \end{aligned}$$

Il est clair que l'application  $R$  est linéaire. D'après la proposition 3.4.6, un déplacement inextensionnel  $\mathbf{u}$  est un déplacement rigide si et seulement si son champ de rotation associé est constant, c'est à dire si  $R(\mathbf{u}) = (0,0)$ . Autrement dit :  $\text{Ker}(R) = \{\text{déplacements rigides}\}$ . Nous avons montré la proposition :

**3.5.4. Proposition.** - *L'espace vectoriel  $\mathbf{R}(S)$  est isomorphe à l'espace quotient  $\mathbf{G} / \{\text{déplacements rigides infinitésimaux}\}$ .*

**3.5.5. Remarque.** - Il est facile de vérifier que l'espace  $\mathbf{R}(S)$  est fermé dans  $[\mathbf{L}^2(\Omega)]^2$ . Or, pour tout déplacement inextensionnel  $\mathbf{u}$  de  $\mathbf{G}$  nous avons l'estimation (3.4.7) :

$$\|R(\mathbf{u})\|_{[\mathbf{L}^2(\Omega)]^2} = \|(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)\|_{[\mathbf{L}^2(\Omega)]^2} \leq C \|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)},$$

si bien que, d'après un théorème de Banach<sup>(\*)</sup>, l'isomorphisme  $R$  est bicontinué de  $\mathbf{R}(S)$  dans  $\mathbf{G} / \{\text{déplacements triviaux}\}$  et il existe une constante positive  $C > 0$  telle que :

$$\inf_{\mathbf{v} \in \{\text{déplacement rigide}\}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)\|_{[\mathbf{L}^2(\Omega)]^2} \cdot \square$$

Nous pouvons ainsi, d'après la proposition 3.5.4, donner une définition équivalente à la définition 3.1.4 d'une surface inhibée.

**3.5.6. Proposition.** - *Soit  $S = (\Omega, \mathbf{r})$  une surface,  $S$  est rigide ou inhibée si et seulement si  $\mathbf{R}(S) = \{(0,0)\}$ .*

D'après la proposition 3.5.1, les éléments de  $\mathbf{R}(S)$  sont tangentes à la surface. Cette propriété nous permet d'avoir des expressions relativement simples lorsqu'on les exprime en composantes contravariantes .

Soient  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathbf{R}(S)$ , posons (ce qui sera valable dans toute la suite de ce mémoire) :

$$\mathbf{w}_\alpha = w_\alpha^p \mathbf{a}_p,$$

---

<sup>(\*)</sup> Voir par exemple dans [Brezis,83] : Soit  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et soit  $L$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Si  $L$  est continue et bijective, alors elle est bicontinue.

les coefficients  $w_\alpha^p$  avec  $w_\alpha^3 = 0$  sont donc les composantes contravariantes du couple  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ . Elles satisfont à un système aux dérivées partielles issu des relations définissant les éléments de l'espace  $\mathbf{R}(S)$ .

En développant suivant les formules de Gauss et de Weingarten (2.1.15) dans  $\mathbf{w}_{1,2} = \mathbf{w}_{2,1}$  :

$$\left[ w_{1,2}^\gamma + \Gamma_{2\lambda}^\gamma w_1^\lambda \right] \mathbf{a}_\gamma + \left[ b_{\lambda 2} w_1^\lambda \right] \mathbf{a}_3 = \left[ w_{2,1}^\gamma + \Gamma_{1\lambda}^\gamma w_2^\lambda \right] \mathbf{a}_\gamma + \left[ b_{1\lambda} w_2^\lambda \right] \mathbf{a}_3,$$

et en identifiant sur chaque composante de la base covariante, nous obtenons un système d'E.D.P. du 1<sup>er</sup> ordre que nous appellerons *système de flexion dérivé* :

$$(3.5.1) \quad \begin{cases} w_{1,2}^1 + \Gamma_{2\lambda}^1 w_1^\lambda & = & w_{2,1}^1 + \Gamma_{1\lambda}^1 w_2^\lambda \\ w_{1,2}^2 + \Gamma_{2\lambda}^2 w_1^\lambda & = & w_{2,1}^2 + \Gamma_{1\lambda}^2 w_2^\lambda \\ b_{12} w_1^1 + b_{22} w_1^2 & = & b_{11} w_2^1 + b_{12} w_2^2. \end{cases}$$

D'autre part, en développant dans  $\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{a}_2 = \mathbf{w}_2 \wedge \mathbf{a}_1$ , il vient :

$$w_1^\lambda \mathbf{a}_\lambda \wedge \mathbf{a}_2 = w_2^\lambda \mathbf{a}_\lambda \wedge \mathbf{a}_1 \Rightarrow w_1^1 [\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2] = w_2^2 [\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_1].$$

D'où :

$$(3.5.2) \quad w_1^1 + w_2^2 = 0.$$

Avec la relation (3.5.2), le système (3.5.1) n'est donc plus qu'à trois inconnues. D'autre part, la troisième équation de (3.5.1) ne contient pas de dérivées ; c'est une équation de compatibilité. Le système (3.5.1)-(3.5.2) peut donc se réduire à un système de deux équations aux dérivées partielles à deux inconnues.

Nous retrouvons également la dépendance de la nature du système à la nature géométrique de la surface : il suffit par exemple d'écrire, d'après la troisième équation de (3.5.1) :

$$b_{22} w_1^2 = b_{11} w_2^1 + 2b_{12} w_2^2,$$

les deux premières équations du système (3.5.1)-(3.5.2) donnent alors :

$$(3.5.3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{2,1}^1 \\ w_{2,1}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b_{11} & -2b_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{2,2}^1 \\ w_{2,2}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{f}(w_2^1, w_2^2),$$

que nous appellerons *système de flexion dérivé réduit* ; dans l'égalité (3.5.3),  $\mathbf{f}$  désigne une fonction dépendant des coefficients de  $S$  et des  $w_\alpha^p$  (de façon affine) que nous n'explicitons pas.

Une courbe  $\Gamma = \{(y^1, y^2) \in \Omega / \phi(y^1, y^2) = 0\}$  est une courbe caractéristique de (3.5.3) si elle satisfait à :

$$\det \left[ \begin{pmatrix} \phi_{,1} & 0 \\ 0 & \phi_{,1} b_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\phi_{,2} \\ \phi_{,2} b_{11} & \phi_{,2} b_{12} \end{pmatrix} \right] = 0.$$

C'est à dire si :

$$b_{22}\phi_{,1}^2 - 2b_{12}\phi_{,1}\phi_{,2} + b_{11}\phi_{,2}^2 = 0,$$

où nous reconnaissons l'équation caractérisant les lignes asymptotiques de  $S$ . Résumons :

**3.5.7. Proposition.** - Soit  $S = (\Omega, \mathbf{r})$  une surface de classe  $C^2$  et soient  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathbf{R}(S)$ . Alors les composantes contravariantes de  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$  satisfont au système différentiel (3.5.1) et (3.5.2) équivalent au système différentiel (3.5.3) dont les courbes caractéristiques sont (définissent) les lignes asymptotiques de la surface  $S$ .

Ainsi, la nature du système de flexion dérivé (3.5.1) et (3.5.2) est intrinsèque à la nature de la surface, bien que l'espace  $\mathbf{R}(S)$  soit défini pour un paramétrage de  $S$  donné. Ce qui est bien cohérent avec la proposition 3.2.2. Nous pouvons donc prendre avantage des coordonnées spéciales sur une surface selon sa nature pour simplifier les expressions du système de flexion dérivé (3.5.1)-(3.5.2). C'est ce que nous ferons plus loin dans la proposition 3.5.8 et la proposition 3.5.10.

**3.5.8. Proposition.** - Soit  $S$  une surface hyperbolique définie par une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$  telle que les courbes coordonnées soient les lignes asymptotiques de  $S$ . Alors, le système de flexion dérivé (3.5.1)-(3.5.2), pour tout couple  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$  de  $\mathbf{R}(S)$ , se réduit à :

$$(3.5.4) \quad \begin{cases} w_{2,1}^1 = -\Gamma_{11}^1 w_2^1 + \Gamma_{22}^1 w_1^2 \\ w_{1,2}^2 = \Gamma_{11}^2 w_2^1 - \Gamma_{22}^2 w_1^2, \end{cases}$$

$$(3.5.5) \quad w_1^1 = w_2^2 = 0.$$

*Preuve de la proposition 3.5.7* : Dans un tel système de coordonnées, d'après la proposition 2.4.3, les coefficients de la seconde forme fondamentale se réduisent :

$$b_{11} = b_{22} = 0 \quad \text{et} \quad b_{12} \neq 0,$$

de sorte que la troisième équation de (3.5.1) devient :

$$b_{12}w_1^1 = b_{12}w_2^2.$$

En combinant alors avec (3.5.2), il vient (3.5.5) et en reportant dans (3.5.1), nous obtenons (3.5.4). ■

**3.5.9. Remarque.** - La relation (3.5.5) de la proposition 3.5.7 indique une propriété tout à fait particulière propre aux surfaces hyperboliques : pour tout élément  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$  de  $\mathbf{R}(S)$  d'une surface hyperbolique doté d'une carte dont les courbes coordonnées sont des lignes asymptotiques, nous avons :

$$(3.5.6) \quad \mathbf{w}_1 = w_1^2 \mathbf{a}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_2 = w_2^1 \mathbf{a}_1.$$

En particulier, la dérivée dans une direction asymptotique d'un champ de rotation infinitésimal sur  $S$ , est transversale à cette direction. □

**3.5.10. Proposition.** - Soit  $S$  une surface elliptique avec un système de coordonnées isométriques conjuguées. Alors, le système de flexion dérivé (3.5.1)-(3.5.2), pour tout couple  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$  de  $\mathbf{R}(S)$ , se réduit à :

$$(3.5.7) \quad \begin{cases} w_{1,2}^1 - w_{2,1}^1 = [\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1]w_2^1 - [2\Gamma_{12}^1]w_1^1 \\ w_{1,1}^1 + w_{2,2}^1 = [\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2]w_2^1 - [2\Gamma_{12}^2]w_1^1, \end{cases}$$

$$(3.5.8) \quad \begin{cases} w_1^1 + w_2^2 = 0 \\ w_1^2 - w_2^1 = 0. \end{cases}$$

*Preuve* : Dans un tel système de coordonnées, d'après la proposition 2.4.2, les coefficients de la seconde forme fondamentale se réduisent :

$$b_{11} = b_{22} \quad \text{et} \quad b_{12} = 0,$$

de sorte que la troisième équation de (3.5.1) devient :

$$b_{11}w_2^1 = b_{22}w_1^2$$

donnant la deuxième équation de (3.5.8) ; la première équation étant simplement (3.5.2). En remplaçant dans les deux premières équations de (3.5.1), il vient alors (3.5.7). ■

### REGULARITE ET TRACE SUR UNE COURBE DES ELEMENTS DE L'ESPACE $\mathbf{R}(S)$ .

A priori les éléments de l'espace  $\mathbf{R}(S)$  sont des éléments de l'espace  $L^2$ , leur régularité dépendant de la régularité des déplacements inextensionnels. Or, nous avons vu dans la section 3 de ce chapitre que la régularité d'un déplacement inextensionnel dépendait de la nature géométrique de la surface. Il en est donc de même pour les éléments de l'espace  $\mathbf{R}(S)$ .

Dans le cas d'une surface hyperbolique la régularité  $H^3 \times H^3 \times H^2(\Omega)$  d'un déplacement inextensionnel  $\mathbf{u}$  (composantes tangentielles et composante normale) et donc la régularité  $L^2$  des éléments de  $\mathbf{R}(S)$  est optimale, mais de façon analogue à la proposition 3.3.5, nous avons des résultats concernant la trace d'un élément de  $\mathbf{R}(S)$  le long d'une courbe d'une surface hyperbolique :

**3.5.11. Proposition.** - Soit  $S = (\Omega, \mathbf{r})$  une surface uniformément hyperbolique et soient  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathbf{R}(S)$ . Si une courbe  $\Gamma$  de  $S$  est transversale aux lignes asymptotiques, alors la trace sur  $\Gamma$  de  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$  a un sens dans  $[L^2(\Gamma)]^2$ .

De plus, lorsque les courbes coordonnées sont les lignes asymptotiques de  $S$ , si la courbe  $\Gamma$  est transversale aux lignes asymptotiques à  $y^1 = \text{constante}$  (resp. à  $y^2 = \text{constante}$ ), alors la trace sur  $\Gamma$  de  $\mathbf{w}_2$  a un sens dans  $L^2(\Gamma)$  (resp.  $\mathbf{w}_1 \in L^2(\Gamma)$ ). □

Autrement dit :

**3.5.12. Corollaire.** - Soit  $S = (\Omega, \mathbf{r})$  une surface uniformément hyperbolique et soit  $\Gamma$  une courbe de  $S$ . Si la courbe  $\Gamma$  est transversale aux lignes asymptotiques, ou si elle est une ligne asymptotique, alors pour tout champ de rotation infinitésimale  $\omega$  sur la surface, la dérivée de  $\omega$  le long de  $\Gamma$  à un sens dans  $L^2(\Gamma)$ .

*Preuve de la proposition 3.5.11 :* Dans un système de coordonnées où les courbes coordonnées sont les lignes asymptotiques de la surface, d'après la proposition 3.5.7, le système de flexion dérivé se simplifie en (3.5.4)-(3.5.5). Notamment (3.5.4) indique que

$$(3.5.6) \quad \begin{cases} w_{2,1}^1 \in L^2(\Omega) \\ w_{1,2}^2 \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Ainsi, d'après un théorème de trace (proposition 1.3.9), la trace sur une courbe  $\Gamma$  transversale aux courbes à  $y^1 = \text{constante}$  (resp. à  $y^2 = \text{constantes}$ ), qui sont des lignes asymptotiques de  $S$ , de  $w_2^1$  (resp.  $w_1^2$ ) a un sens dans  $L^2(\Gamma)$ . ■

Dans le cas d'une surface elliptique, la proposition 3.3.3, indique que les déplacements inextensionnels (à l'intérieur) sont aussi régulières que la surface :

**3.5.13. Proposition.** - Soit  $S = (\Omega, \mathbf{r})$  une surface uniformément elliptique de classe  $C^{m+2}$ ,  $m \geq 0$ , alors les éléments de  $\mathbf{R}(S)$  sont de classe  $C^m$  dans tout ouvert contenu dans  $\Omega$ .

Mais il faut noter que la propriété de régularité précédente, suivant la remarque 1.3.5, est locale et n'est pas vraie sur le bord (de  $S$ ) en général. Si bien que la trace des éléments de  $\mathbf{R}(S)$  sur une courbe  $\Gamma$  de  $S$  est bien définie pourvu que  $\Gamma$  ne soit pas au bord. Cependant, suivant la proposition 1.3.6, lorsque  $\Gamma$  est une partie du bord, nous pouvons tout de même donner un sens à la trace sur  $\Gamma$  des éléments de  $\mathbf{R}(S)$  :

**3.5.14. Proposition.** - Soit  $S = (\Omega, \mathbf{r})$  une surface uniformément elliptique de classe  $C^3$  avec  $\Gamma \in \partial\Omega$  de classe  $C^1$ . Alors la trace sur  $\Gamma$  de  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathbf{R}(S)$  a un sens dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$ .

*Preuve :* Choisissons un système de coordonnées isométriques conjuguées, d'après la proposition 3.5.9, le système de flexion dérivé satisfait par les composantes contravariantes  $w_\alpha^\beta$  de  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathbf{R}(S)$ , donne le système (3.5.7) avec (3.5.8) :

$$\begin{cases} w_{1,2}^1 - w_{2,1}^1 = [\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1]w_2^1 - [2\Gamma_{12}^1]w_1^1 \\ w_{1,1}^1 + w_{2,2}^1 = [\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2]w_2^1 - [2\Gamma_{12}^2]w_1^1. \end{cases}$$

En dérivant alors la première équation de (3.5.7) par rapport à  $y^2$  et en l'additionnant à la deuxième équation de (3.5.7) qu'on aura dérivée par rapport à  $y^1$ , nous obtenons que :

$$\Delta w_1^1 \in H^{-1}(\Omega).$$

De façon analogue nous avons :

$$\Delta w_2^1 \in H^{-1}(\Omega),$$

où " $\Delta$ " désigne le classique opérateur différentiel laplacien (remarquons que c'est dans cette opération que nous avons besoin de la régularité  $C^3$  de  $S$ ). Si bien que, d'après la proposition 1.3.6, la trace sur  $\partial\Omega$  (resp. sur  $\Gamma$ ) des composantes  $w_\alpha^\beta$  a un sens dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  (resp. dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$ ). ■

Enfin, dans le cas d'une surface  $S$  développable, que nous étudions de façon plus détaillée dans la section suivante, la trace des éléments de  $\mathbf{R}(S)$  sur une courbe  $\Gamma$  transversale aux génératrices a un sens dans  $L^2(\Gamma)$  (voir remarque 3.6.2).

### 3.6. DEPLACEMENT INEXTENSIONNEL D'UNE SURFACE DEVELOPPABLE.

Rappelons qu'une surface  $S$  est dite réglée si elle peut s'écrire localement sous la forme  $S = (\Omega, \mathbf{r})$ , comme en (2.6.1) avec :

$$(3.6.1) \quad \mathbf{r}(y^1, y^2) = \mathbf{c}(y^1) + y^2 \mathbf{g}(y^1).$$

Les droites définies à  $y^1$  constant sont les génératrices de  $S$  et les courbes à  $y^2$  constant sont des directrices. La surface réglée  $S$  est développable, si de plus, les plans tangents à  $S$  coïncident le long des génératrices ou encore si sa courbure totale  $K$  est nulle (cf. proposition 2.5.3.).

**3.6.1. Proposition.** *Soit  $S$  une surface développable définie comme en (3.6.1) et soit  $\mathbf{u}$  un déplacement inextensionnel sur  $S$ , alors, modulo un déplacement rigide,  $\mathbf{u}$  s'écrit sous la forme :*

$$(3.6.2) \quad \mathbf{u}(y^1, y^2) = \int^{y^1} [\rho_1(\hat{y}^1) \mathbf{c}'(\hat{y}^1) + \rho_2(\hat{y}^1) \mathbf{g}(\hat{y}^1)] \wedge [\mathbf{c}(y^1) - \mathbf{c}(\hat{y}^1) + y^2 \mathbf{g}(y^1)] d\hat{y}^1,$$

où  $\rho_1 \in H^1(y^1)$  et  $\rho_2 \in L^2(y^2)$ .  $\square$

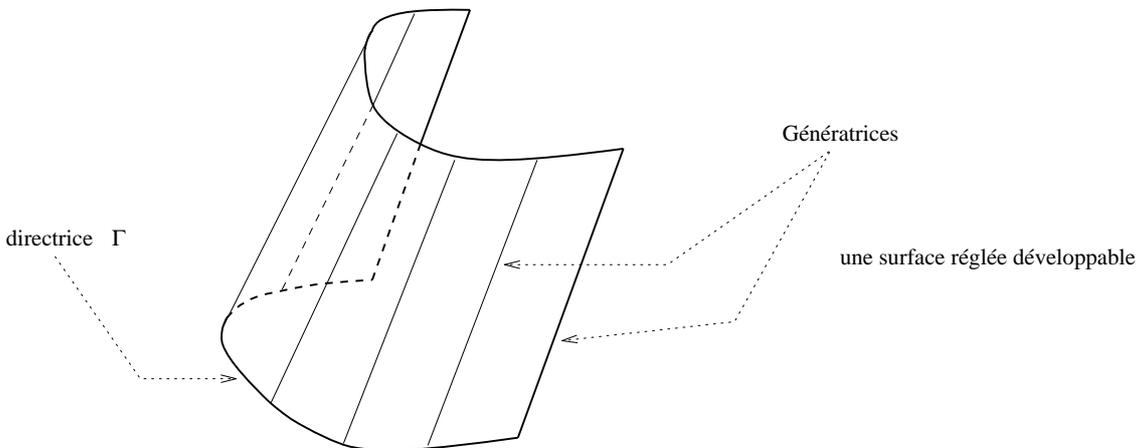


Figure 3.6.1

C'est la description des éléments de l'espace  $\mathbf{G}$  la plus générale. C'est une description classique, voir [Darboux,1894], cependant nous avons une information supplémentaire concernant la régularité du déplacement, nous renvoyons à la remarque 3.6.2.

*Preuve de la proposition 3.6.1 :* Soit un couple de champs de  $\mathbf{R}(S)$ , espace représentant les dérivées partielles des champs de rotation infinitésimale sur  $S$ . Rappelons que l'espace  $\mathbf{R}(S)$  est isomorphe à l'espace quotient  $\mathbf{G}/\{\text{déplacements rigides}\}$  (cf. proposition 3.5.3). Notons, comme précédemment, les composantes contravariantes de  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$  par :

$$\mathbf{w}_\alpha = w_\alpha^1 \mathbf{a}_1 + w_\alpha^2 \mathbf{a}_2.$$

Elles satisfont au système (de flexion dérivé) d'E.D.P. du 1<sup>er</sup> ordre (3.5.1)-(3.5.2).

Dans le cas d'une surface développable, d'après la proposition 2.5.3, les coefficients de la seconde forme fondamentale, ainsi que les symboles de Christoffel se simplifient :

$$b_{22} = b_{12} = 0 \text{ et } \Gamma_{22}^\alpha = 0$$

et

$$b_{11} \neq 0.$$

Si bien que les équations du système de flexion dérivé (3.5.1)-(3.5.2) deviennent :

$$(3.6.3) \quad \begin{cases} w_2^1 = 0 \\ w_{1,2}^1 = -2\Gamma_{12}^1 w_1^1 \\ w_{1,2}^2 = -w_{1,1}^1 - 2\Gamma_{12}^2 w_1^1 \end{cases}$$

et

$$w_1^1 + w_2^2 = 0.$$

La deuxième équation de (3.6.3) est une équation différentielle ordinaire linéaire en  $w_1^1$  qu'on intègre facilement, de même pour la troisième équation. Nous obtenons :

$$(3.6.4) \quad \begin{cases} w_1^1 = \rho_1(y^1)E(y^1, y^2) = -w_2^2 \\ w_1^2 = \rho_2(y^1) + F(y^1, y^2) \\ w_2^1 = 0, \end{cases}$$

où on a choisi les fonctions  $E$  et  $F$  tels que  $E(y^1, 0) = \exp(0) = 1$  et  $F(y^1, 0) = 0$ , de sorte que :

$$E(y^1, y^2) = \exp\left(-\int_0^{y^2} 2\Gamma_{12}^1(y^1, \hat{y}^2) d\hat{y}^2\right)$$

et

$$F(y^1, y^2) = \int_0^{y^2} (w_{1,1}^1 - 2\Gamma_{12}^2 w_1^1)(y^1, \hat{y}^2) d\hat{y}^2.$$

Les fonctions  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont, a priori, arbitraires dans  $L^2(\Omega)$ . Mais pour que  $w_1^2$  soit dans  $L^2(\Omega)$ , il faut que la fonction  $F$  soit également dans  $L^2(\Omega)$ , d'où il est nécessaire (et suffisant) que  $\rho_1$  soit dans  $L^2$ , c'est à dire  $\rho_1 \in H^1$ .

Les champs  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$  s'écrivent alors :

$$(3.6.5) \quad \begin{cases} \mathbf{w}_1 = \rho_1(y^1)E(y^1, y^2)\mathbf{a}_1 + [F(y^1, y^2) + \rho_2(y^1)]\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{w}_2 = -\rho_1(y^1)E(y^1, y^2)\mathbf{a}_1. \end{cases}$$

Ainsi, pour chaque couple  $(\rho_1, \rho_2) \in H^1 \times L^2$ , il correspond un unique couple  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$  de l'espace  $\mathbf{R}(S)$  et réciproquement. Un déplacement inextensionnel  $\mathbf{u}$  s'écrit alors, modulo un déplacement rigide (cf. proposition 3.4.4) :

$$(3.6.6) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}(y^1, y^2) = & \int_0^{y^1} [\rho_1(\hat{y}^1)\mathbf{a}_1(\hat{y}^1, 0) + \rho_2(\hat{y}^1)\mathbf{a}_2(\hat{y}^1, 0)] \wedge [\mathbf{r}(y^1, y^2) - \mathbf{r}(\hat{y}^1, 0)] d\hat{y}^1 \\ & + \int_0^{y^2} -\rho_1(y^1)E(y^1, \hat{y}^2)\mathbf{a}_2(y^1, \hat{y}^2) \wedge [\mathbf{r}(y^1, y^2) - \mathbf{r}(y^1, \hat{y}^2)] d\hat{y}^2. \end{aligned}$$

Or d'après le paramétrage donné (3.6.1) nous avons :

$$(3.6.7) \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}'(y^1) + y^2 \mathbf{g}(y^1) \text{ et } \mathbf{a}_2 = \mathbf{g}(y^1),$$

ce qui entraîne que :

$$\mathbf{a}_2(y^1, \hat{y}^2) \wedge [\mathbf{r}(y^1, y^2) - \mathbf{r}(y^1, \hat{y}^2)] = \mathbf{g}(y^1) \wedge [y^2 - \hat{y}^2] \mathbf{g}(y^1) = 0.$$

Finalement, l'expression (3.6.6) se réduit à (3.6.2). ■

**3.6.2. Remarque** - Dans l'expression (3.6.5), nous remarquons que  $\mathbf{w}_2$  est dans  $H^1(\Omega)$ , si bien que la trace de  $\mathbf{w}_2$  sur une courbe quelconque  $\Gamma$  a un sens dans  $L^2(\Gamma)$ . D'autre part, toujours dans (3.6.5) il est facile de voir que  $\mathbf{w}_1$  a une trace le long de la directrice, et donc sur n'importe quelle courbe transversale aux génératrices (qui peut être définie comme une directrice de la surface développable). Cependant, la trace sur une génératrice n'a pas de sens. □

CAS D'UN CONE.

Soit  $S$  un cône de sommet  $\mathbf{X}$ , défini par  $S = (\Omega, \mathbf{r})$  avec

$$(3.6.8) \quad \mathbf{r}(y^1, y^2) = \mathbf{X} + y^2 \mathbf{g}(y^1),$$

tel que  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{g}'$  soient linéairement indépendantes et  $S$  contient le sommet  $\mathbf{X}$ .

En appliquant la proposition 3.6.1, nous obtenons l'expression générale d'un déplacement inextensionnel sur un cône :

**3.6.3. Proposition.** - Soit  $\mathbf{u}$  un déplacement inextensionnel sur  $S$ , un cône défini comme en (3.6.8). Alors, modulo un déplacement rigide,  $\mathbf{u}$  s'écrit, avec  $\rho \in L^2$  :

$$(3.6.9) \quad \mathbf{u}(y^1, y^2) = \left[ \int_0^{y^2} \rho(\hat{y}^1) \mathbf{g}(\hat{y}^1) d\hat{y}^1 \right] \wedge y^2 \mathbf{g}(y^1).$$

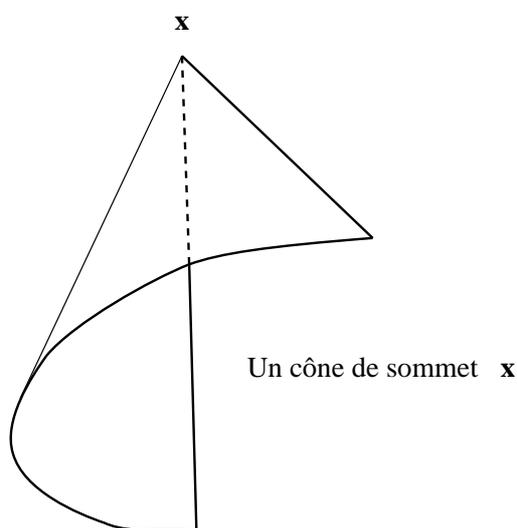


Figure 3.6.2.

*Preuve :* Soient  $\mathbf{u}$  un déplacement inextensionnel sur  $S$  et  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$  le couple de champ de  $\mathbf{R}(S)$  qui lui est associé. D'après la proposition 3.6.1,  $\mathbf{u}$  s'écrit sous la forme ((3.6.2) et les composantes contravariantes satisfont au système de flexion (3.5.1) et (3.5.2) qui se réduit au système (3.6.3) donnant (3.6.4).

Or au sommet  $\mathbf{X}$ , un déplacement se résume à une translation, si bien que nous avons en particulier :

$$w_1^1(y^1, 0) = \rho_1(y^1) = 0.$$

D'où :

$$\begin{cases} w_1^1 = w_2^2 = w_2^1 = 0 \\ w_1^2 = \rho_2(y^1), \end{cases}$$

autrement dit :

$$(3.6.10) \quad \mathbf{w}_2 = 0 \text{ et } \mathbf{w}_1 = \rho_2(y^1)\mathbf{a}_2.$$

Si bien que (3.6.2) se réduit à (3.6.9). ■

### 3.7. PSEUDO-FLEXIONS SUR UNE SURFACE. EXEMPLES.

Dans cette section, en liaison avec les notions de surfaces bien ou mal inhibées (cf. définition 3.1.6 et définition 3.1.7), nous explicitons pour certaines surfaces, des pseudo-flexions ou Pseudo-bendings introduits dans [Goldeneveizer, Lidski et Tovstik,79]. Rappelons tout d'abord :

**3.7.1. Définition.** - Soit  $S$  une surface donnée par une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$  et  $\mathbf{V}$  l'espace des déplacements admissible sur  $S$ . On suppose que  $S$  est inhibée. Une suite de déplacements  $\mathbf{u}^n$  de  $\mathbf{V}$  définit une suite de **pseudo-flexions** sur  $S$  si :

$$(3.7.1) \quad \frac{\|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}}}{\|\gamma(\mathbf{u}^n)\|_{L^2(\Omega)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Les pseudo-flexions correspondent donc à des déplacements grands par rapport à la variation de longueurs de la surface. Cela ressemble beaucoup au déplacement en flexion sur un plan. Nous avons vu que qu'un plan n'est jamais rigide.

#### PSEUDO-FLEXIONS D'UNE SURFACE HYPERBOLIQUE.

Soit  $S$  une surface hyperbolique et soit  $S_T$  une partie de  $S$  telle que le bord de  $S_T$  soit constitué uniquement des lignes asymptotiques. Il est clair qu'une telle partie de  $S$  existe toujours. Nous allons exhiber dans ce qui suit, une famille de déplacements  $\mathbf{u}^n$  définis sur  $S$  telle que les trois conditions suivantes soient satisfaites :

$$(3.7.2) \quad \begin{aligned} & \text{i)} \quad \mathbf{u}^n \equiv 0 \text{ sur } S - S_T. \\ & \text{ii)} \quad \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)} \geq c > 0 \text{ pour } n \text{ suffisamment grand.} \\ & \text{iii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\gamma(\mathbf{u}^n)\|_{L^2(\Omega)} = 0. \end{aligned}$$

**3.7.3. Proposition.** - Soient  $S$  une surface hyperbolique et  $S_T$  une partie de  $S$ , comme précédemment. On se donne une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$  de  $S$  telle que les courbes coordonnées définissent les lignes asymptotiques de  $S$  et telle que  $S_T$  soit définie sur  $\Omega_T = [0, T] \times [0, T]$ . Soit  $\mathbf{u}^n$  la famille de déplacements sur  $S$  définie par :

$$(3.7.3) \quad \begin{cases} u_1^n = \frac{1}{n} \phi(y^1, y^2) \sin(ny^2) \\ u_2^n = \frac{1}{n} \phi(y^1, y^2) \sin(ny^1) \\ b_{12} u_3^n = \frac{1}{2} [u_{2,1}^n + u_{1,2}^n] - \Gamma_{12}^\alpha u_\alpha^n \end{cases} \quad \text{sur } S_T,$$

et

$$(3.7.4) \quad \mathbf{u}^n \equiv 0 \text{ sur } S - S_T.$$

où  $\phi$  est une fonction positive de classe  $C^2$  à support compact contenu dans  $\Omega_T$  et valant 1 dans un compact  $K_T^{(*)}$  :

$$(3.7.5) \quad \phi \in C^2(\Omega), 0 \leq \phi \leq 1 \text{ et } \phi = 1 \text{ sur } K_T \subset \Omega_T.$$

Alors la suite  $\mathbf{u}^n$  est une suite de pseudo-flexions sur  $S$  satisfaisant aux trois conditions de (3.7.2).

**3.7.4. Remarque.** - Dans la proposition 3.7.3 on peut également choisir dans (3.7.5) :

$$(3.7.6) \quad \phi \in C^m(\Omega), 0 \leq \phi \leq 1 \text{ et } \phi = 1 \text{ sur } K_T \subset \Omega_T.$$

de sorte que les fonctions  $\mathbf{u}^n$  définies en (3.7.3) et en (3.7.4) soient de classe  $C^m$ , pour  $m > 2$ . On peut également prendre, de manière plus générale,  $\phi$  appartenant à  $D(\Omega_T)$ .  $\square$

*Preuve de la proposition 3.7.3 :* D'abord, remarquons que i) de (3.7.2) est satisfait par définition. Dans un tel système de coordonnées où les lignes asymptotiques de  $S$  sont définis par les courbes coordonnées, les coefficients de la seconde forme fondamentale se simplifient comme en (3.5.4) :

$$b_{11} = 0, b_{22} = 0 \text{ et } b_{12} \neq 0.$$

---

(\*) On dit que  $\phi$  est une fonction plateau.

Ce qui nous assure que les fonctions  $\mathbf{u}^n$  sont bien définies. La fonction  $\phi$  n'a d'autre fonction que de "lisser" les fonction  $\mathbf{u}^n$ , assurant que les fonctions définies en (3.7.4) sont nulles et de dérivées premières et secondes nulles (et donc continues!) sur le bord de  $S_T$ .

Montrons ii) de (3.7.2). Les composantes covariantes du tenseur de déformation linéarisé  $\gamma(\mathbf{u})$  d'un déplacement  $\mathbf{u}$  sur  $S$ , s'écrivent suivant l'expression du système de flexion en coordonnées covariantes (3.2.9) :

$$(3.7.7) \quad \begin{cases} \gamma_{11}(\mathbf{u}) &= u_{1,1} - \Gamma_{11}^\lambda u_\lambda \\ \gamma_{22}(\mathbf{u}) &= u_{2,2} - \Gamma_{22}^\lambda u_\lambda \\ \gamma_{12}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) - \Gamma_{12}^\lambda u_\lambda - b_{12}u_3, \end{cases}$$

si bien que par définition, nous avons :

$$(3.7.8) \quad \gamma_{12}(\mathbf{u}^n) = 0.$$

Il est facile de voir, d'après (3.7.4), que  $u_1^n$  et  $u_2^n$  convergent uniformément sur  $S$  vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. D'où :

$$(3.7.9) \quad \left\| u_\alpha^n \right\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Mais d'autre part, nous avons :

$$(3.7.10) \quad \begin{aligned} u_{1,1}^n &= \frac{1}{n} \phi_{,1}(y^1, y^2) \mathbf{sin}(ny^2) \\ u_{2,2}^n &= \frac{1}{n} \phi_{,2}(y^1, y^2) \mathbf{sin}(ny^1) \end{aligned}$$

avec  $\phi_{,1}$  et  $\phi_{,2}$  étant continues, bornées à support dans  $\Omega_T$ .

Il est immédiat que les suites  $u_{1,1}^n$  et  $u_{2,2}^n$  convergent uniformément vers 0 dans  $\Omega$ , d'où, avec (3.7.9) :

$$(3.7.11) \quad \begin{aligned} \left\| \gamma_{11}(\mathbf{u}^n) \right\|_{L^2(\Omega)} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \left\| \gamma_{22}(\mathbf{u}^n) \right\|_{L^2(\Omega)} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

c'est à dire, puisque  $\gamma_{12}(\mathbf{u}^n) = 0$ , que (3.7.11) indique  $\left\| \gamma(\mathbf{u}^n) \right\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Il nous reste à montrer iii) de (3.7.2), c'est à dire que la norme dans  $\mathbf{V}$  des déplacements  $\mathbf{u}^n$  est bornée inférieurement et strictement plus grande que 0. Il suffit pour cela de montrer que  $\left\| u_3^n \right\|_{L^2} \geq c > 0$ . Nous avons :

$$2b_{12}u_3^n = \frac{1}{n} \phi_{,1} \mathbf{sin}(ny^1) + \phi \mathbf{cos}(ny^1) + \frac{1}{n} \phi_{,2} \mathbf{sin}(ny^2) + \phi \mathbf{cos}(ny^2) + \Gamma_{12}^\alpha u_\alpha^n,$$

ce qui entraîne :

$$(3.7.13) \quad \|2b_{12}\|_{L^2(\Omega)} \|u_3^n\|_{L^2(\Omega)} \geq \|2b_{12}u_3^n\|_{L^2(\Omega)} \geq \left\| \phi \left[ \cos(ny^1) + \cos(ny^2) \right] \right\|_{L^2(\Omega)} - \frac{K}{n},$$

où  $K$  est une constante qui dépend de  $\phi$  et de  $\phi_{,\alpha}$  mais qui ne dépend pas de  $n$ . Or

$$\begin{aligned} \left\| \phi \left[ \cos(ny^1) + \cos(ny^2) \right] \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega_T} \phi^2 \left[ \cos(ny^1) + \cos(ny^2) \right]^2 dy^1 dy^2 \\ &\geq \int_{K_T} \left[ \cos(ny^1) + \cos(ny^2) \right]^2 dy^1 dy^2 \\ &\geq \int_{K_T} \left[ \cos^2(ny^1) + \cos^2(ny^2) + 2 \cos(ny^1) \cos(ny^2) \right] dy^1 dy^2 \end{aligned}$$

et d'autre part, on a :

$$\int_{t_1}^{t_2} \cos^2(nt) dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} 1 - \cos(2nt) dt = \frac{t_2 - t_1}{2} - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \cos(2nt) dt = \frac{t_2 - t_1}{2} - \left[ \frac{\sin(2nt_2) - \sin(2nt_1)}{n} \right],$$

si bien que (3.7.13) entraîne finalement que :

$$\|2b_{12}\|_{L^2(\Omega)} \|u_3^n\|_{L^2(\Omega)} \geq K' - \frac{K}{n},$$

où  $K'$  est une constante positive qui ne dépend que de  $\Omega_T$ . D'où la relation ii) de (3.7.2) pour tout  $n$  suffisamment grand ■

### PSEUDO-FLEXIONS D'UNE SURFACE DEVELOPPABLE.

Dans le cas d'une surface réglée développable  $S$ , nous pouvons également exhiber des pseudo-flexions d'une façon tout à fait analogue au cas d'une surface hyperbolique. Choisissons une carte d'une surface développable du type (2.6.1) comme dans la section précédente.

Rappelons que dans un tel système de coordonnées, d'après la proposition 2.5.3 les coefficients de la surface se simplifient :

$$b_{22} = b_{12} = 0 \text{ et } \Gamma_{22}^\alpha = 0$$

et

$$b_{11} \neq 0.$$

Si bien que l'expression du tenseur de déformation linéarisé en coordonnées covariantes se réduit :

$$(3.7.13) \quad \begin{cases} \gamma_{11}(\mathbf{u}) &= u_{1,1} - \Gamma_{11}^\lambda u_\lambda - b_{11} u_3 \\ \gamma_{12}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) - \Gamma_{12}^\lambda u_\lambda \\ \gamma_{22}(\mathbf{u}) &= u_{2,2}. \end{cases}$$

**3.7.5. Proposition.** - Soit la suite de déplacements  $\mathbf{u}^n$  défini sur  $S$  par :

$$\begin{cases} u_1^n = \frac{1}{n} \phi(y^1, y^2) \sin(ny^1) \\ u_2^n = \frac{1}{n} \phi(y^1, y^2) \\ b_{11} u_3^n = u_{1,1}^n + \Gamma_{11}^\alpha u_\alpha^n \end{cases} \quad \text{sur } S_T.$$

et  $\mathbf{u}^n = 0$  sur  $S-S_T$ .

avec  $\phi \in C^2(\Omega)$ ,  $0 \leq \phi \leq 1$  et  $\phi = 1$  sur  $K_T \subset \Omega_T$ .

où  $S_T$  est une partie de  $S$  définie par une partie  $\Omega_T = [0, T] \times [0, T]$ , pour  $T$  fixé. Alors il existe  $c > 0$  telle que la suite  $\mathbf{u}^n$  satisfait à :

$$(3.7.14) \quad \begin{aligned} \text{i)} & \quad \mathbf{u}^n \equiv 0 \text{ sur } S-S_T. \\ \text{ii)} & \quad \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)} \geq c > 0 \text{ pour tout } n \text{ suffisamment grand.} \\ \text{iii)} & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\gamma(\mathbf{u}^n)\|_{L^2(\Omega)} = 0. \end{aligned}$$

*Preuve :* La démonstration de la proposition 3.7.5 se fait de la même façon que pour la proposition 3.7.3.

Remarquons tout d'abord que i) de (3.7.14) est satisfait par définition. De même par définition, nous avons :

$$(3.7.15) \quad \gamma_{11}(\mathbf{u}^n) = 0.$$

D'autre part, nous pouvons calculer :

$$(3.7.16) \quad \begin{aligned} u_{1,2}^n + u_{2,1}^n &= \frac{1}{n} \phi_{,2} \sin(ny^1) + \frac{1}{n} \phi_{,1} \\ u_{2,2}^n &= \frac{1}{n} \phi_{,2} \end{aligned}$$

Il est facile de voir que  $u_1^n$  et  $u_2^n$  convergent uniformément sur  $S$  vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini, de même que  $u_{1,2}^n + u_{2,1}^n$  et  $u_{2,2}^n$ . D'où :

$$(3.7.17) \quad \|u_\alpha^n\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

ce qui entraîne :

$$(3.7.18) \quad \begin{aligned} \|\gamma_{12}(\mathbf{u}^n)\|_{L^2(\Omega)} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \|\gamma_{22}(\mathbf{u}^n)\|_{L^2(\Omega)} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

c'est à dire, puisque  $\gamma_{11}(\mathbf{u}^n) = 0$ , que (3.7.18) indique :

$$\|\gamma(\mathbf{u}^n)\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Il reste à montrer ii) de (3.7.13). Nous avons :

$$b_{11}u_3^n = \frac{1}{n} \phi_{,1} \sin(ny^1) + \phi \cos(ny^1) + \Gamma_{11}^\alpha u_\alpha^n.$$

Si bien que :

$$\|b_{11}\|_{L^2(\Omega)} \|u_3^n\|_{L^2(\Omega)} \geq \|b_{11}u_3^n\|_{L^2(\Omega)} \geq \|\phi \cos(ny^1)\|_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{n} K,$$

$$\|u_3^n\|_{L^2(\Omega)} \geq K' - \frac{1}{n} K,$$

où  $K$  et  $K'$  sont des constantes strictement positives qui dépendent des coefficients de la surface, de  $\phi$ , de  $\phi_{,\alpha}$  ou de  $\Omega_T$  mais ne dépendent pas de  $n$ . D'où la relation ii) de (3.7.13) pour tout  $n$  suffisamment grand. ■

## CHAPITRE 4.

### SUR LA RIGIDIFICATION DES SURFACES.

#### 4.1. RIGIDIFICATION OU INHIBITION D'UNE SURFACE PAR DES CONDITIONS AUX LIMITES CINEMATQUES.

Dans l'espace euclidien  $E$  rapporté à un repère orthonormé  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , soit  $S$  une surface donnée par une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$  et soit  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  (resp.  $(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3)$ ) la base covariante (resp. la base contravariante) qui lui est associée. Soit  $\mathbf{u} \in \mathbf{G}$  un déplacement inextensionnel sur  $S$ . Nous rappelons que  $\mathbf{u}$  satisfait au système de flexion (3.1.1a) :

$$\langle \mathbf{u}_{,\alpha}, \mathbf{r}_{,\beta} \rangle + \langle \mathbf{u}_{,\beta}, \mathbf{r}_{,\alpha} \rangle = 0 \text{ en tout point de } S,$$

que nous pouvons exprimer dans différents types de coordonnées locales.

En choisissant une carte du type (3.2.1) :

$$\mathbf{r}(x_1, x_2) = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \varphi(x_1, x_2) \mathbf{e}_3$$

et en écrivant  $\mathbf{u}$  suivant ses composantes cartésiennes :

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3,$$

l'expression en coordonnées cartésiennes de (3.1.1a) est le système différentiel du premier ordre (3.2.6) :

$$\begin{cases} u_{1,1} + \varphi_{,1} u_{3,1} & = 0 \\ u_{2,2} + \varphi_{,2} u_{3,2} & = 0 \\ u_{1,2} + u_{2,1} + \varphi_{,1} u_{3,2} + \varphi_{,2} u_{3,1} & = 0, \end{cases}$$

qui est non-Kowaleskien mais qui est "équivalent" dans un certain sens (voir la proposition 3.2.1) à l'équation différentielle du second ordre (3.2.7) :

$$\varphi_{,22} u_{3,11} - 2\varphi_{,12} u_{3,12} + \varphi_{,11} u_{3,22} = 0,$$

dont les courbes caractéristiques définissent les lignes asymptotiques de la surface.

D'autre part, en écrivant  $\mathbf{u}$  suivant ses composantes covariantes (en gardant abusivement la notation  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ) :

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{a}^1 + u_2 \mathbf{a}^2 + u_3 \mathbf{a}^3,$$

nous avons l'expression du système de flexion en coordonnées covariantes (3.2.9) :

$$\begin{cases} u_{1,1} - \Gamma_{11}^\lambda u_\lambda - b_{11} u_3 & = 0 \\ u_{2,2} - \Gamma_{22}^\lambda u_\lambda - b_{22} u_3 & = 0 \\ \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) - \Gamma_{12}^\lambda u_\lambda - b_{12} u_3 & = 0, \end{cases}$$

où les coefficients  $\Gamma_\alpha^{\beta\lambda}$  et  $b_{\alpha\beta}$  sont respectivement les symboles de Christoffel et les coefficients de la seconde forme fondamentale. Le système de flexion en coordonnées covariantes (3.2.9) est un système différentiel d'ordre total 2 ; en choisissant une carte telle que les courbes coordonnées soient des courbes principales orthogonales, on peut le ramener au système réduit (3.2.10) :

$$\begin{aligned} u_{1,2} + u_{2,1} &= 2\Gamma_{12}^\lambda u_\lambda \\ b_{22}u_{1,1} - b_{11}u_{2,2} &= (b_{22}\Gamma_{11}^\lambda - b_{11}\Gamma_{22}^\lambda)u_\lambda, \end{aligned}$$

dont les courbes caractéristiques sont, comme pour l'équation (3.2.7), les courbes définissant les lignes asymptotiques de la surface.

Restons en coordonnées covariantes. Une manière simple pour inhiber (rigidifier) une portion de surface  $S$  est d'imposer une condition de fixation (déplacement nul) sur une partie  $\Gamma_o$  du bord de la surface. Une telle condition s'écrit :

$$(4.1.1) \quad \mathbf{u} \equiv 0 \text{ sur } \Gamma_o.$$

En particulier, (4.1.1) implique trivialement :

$$(4.1.2) \quad u_1 = u_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_o.$$

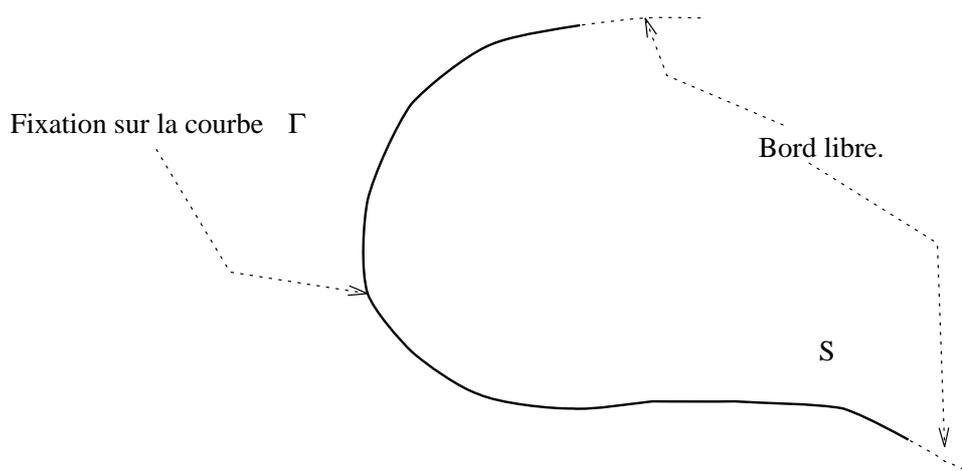


Figure 4.1.1.

La condition (4.1.2) constitue une donnée de Cauchy pour le système différentiel (3.2.10). Ainsi, les théorèmes d'unicité locale du problème de Cauchy donne  $u_1 = u_2 = 0$  au voisinage de la courbe  $\Gamma_0$ , pourvu qu'elle soit transversale aux lignes asymptotiques de la surface ; ce sont les théorème de Holmgren (théorème 1.1.10) pour des surfaces analytiques et de Carleman (théorème 1.1.11) pour des surfaces non-analytiques de classe  $C^3$ . Enfin, il est facile de voir dans (3.2.9) que  $u_1 = u_2 = 0$  implique  $u_3 = 0$ . Nous pouvons donc énoncer :

**4.1.1. Proposition.** - Soit  $S$  une surface régulière fixée sur une partie  $\Gamma_0$  (de mesure non nulle) de son bord. Si  $\Gamma_0$  est transversale aux (éventuelles) lignes asymptotiques de  $S$ , alors  $S$  est inhibée (rigide en flexion) dans un voisinage de  $\Gamma_0$ .  $\square$

Dans la plupart des cas, nous pouvons préciser un peu ce voisinage rigidifié. Nous divisons cette étude selon la nature géométrique de la surface :

**4.1.2. Proposition.** - Soit  $S$  une surface uniformément elliptique régulière (de classe  $C^3$ ), encastrée ou fixée sur une partie de son bord comme précédemment (figure 4.1.2). Alors  $S$  est rigide partout.  $\square$

Une surface elliptique  $S$  fixée le long de la courbe  $\Gamma$

$S$  est entièrement inhibée.

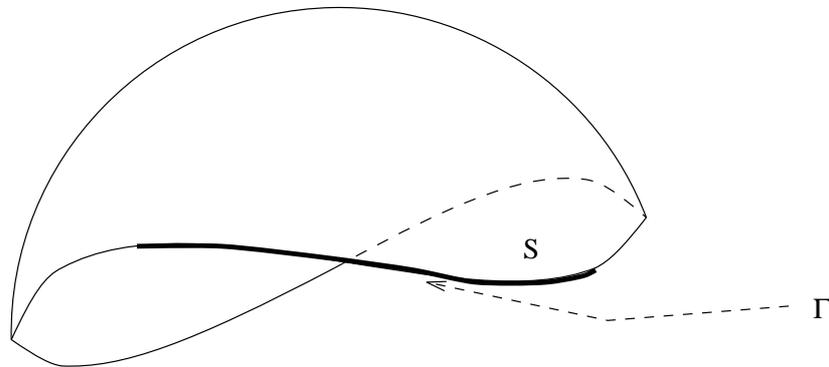


Figure 4.1.2

*Preuve de la proposition 4.1.2 :*  $S$  étant de nature elliptique, elle ne possède pas de ligne asymptotique. La proposition 4.1.1 établit alors la rigidité de  $S$ , au voisinage du pli.

Plaçons nous dans un système de coordonnées cartésiennes comme en (3.2.1).

L'inhibition au voisinage de la courbe  $\Gamma_0$  impose trivialement que la composante "verticale" d'un déplacement inextensionnel est nulle dans ce même voisinage de  $\Gamma_0$ . Or, d'après la proposition 1.2.3, cette composante est solution de l'équation aux dérivées partielles du second ordre (3.2.7). Comme la surface est elliptique, l'équation (3.2.7) est de nature elliptique (voir proposition 3.2.2). D'autre part les coefficients de la surface sont supposés assez réguliers, le théorème 1.3.3 (prolongement unique) montre alors que cette composante "verticale" est nulle sur toute la surface. Il est clair qu'il est possible de choisir localement trois systèmes de coordonnées cartésiennes tels que les "composantes verticales" respectives soient linéairement indépendantes, nous avons donc montré que le déplacement est nul sur la surface entière. ■

**4.1.3. Remarque.** - Pour une surface uniformément elliptique  $S$  fixée sur tout le bord, l'inhibition peut être prouvée par l'unicité du problème de Dirichlet\* homogène associé à l'équation aux dérivées partielles du second ordre (3.2.7) qui est alors elliptique. Plus précisément, une telle surface est bien inhibée ; nous y reviendrons au chapitre 5. □

---

\* Problème de Dirichlet : trouver  $u \in H^2(\Omega)$  satisfaisant à : 
$$\begin{cases} \Delta u = f \in L^2(\Omega) \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le théorème de Lax-Milgram montre alors l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Dirichlet, voir par exemple [Brézis,83] ; ceci restant vrai pour tout opérateur différentiel elliptique autre que le laplacien  $\Delta$ .

Considérons maintenant le cas d'une surface hyperbolique. Nous allons voir que l'inhibition se situe dans une région précise définie par la condition aux limites imposée :

**4.1.4. Proposition.** - Soit  $S$  une surface uniformément hyperbolique, encastrée ou fixée sur une partie de son bord comme précédemment. Si  $\Gamma_o$  est transversale aux lignes asymptotiques de  $S$ , alors  $S$  est rigide dans le domaine de détermination de  $\Gamma_o$ , que nous notons  $D_d(\Gamma_o)$ , domaine délimité par les lignes asymptotiques issues de  $\Gamma_o$ .

Une surface hyperbolique fixée le long d'une courbe  $\Gamma_o$ .

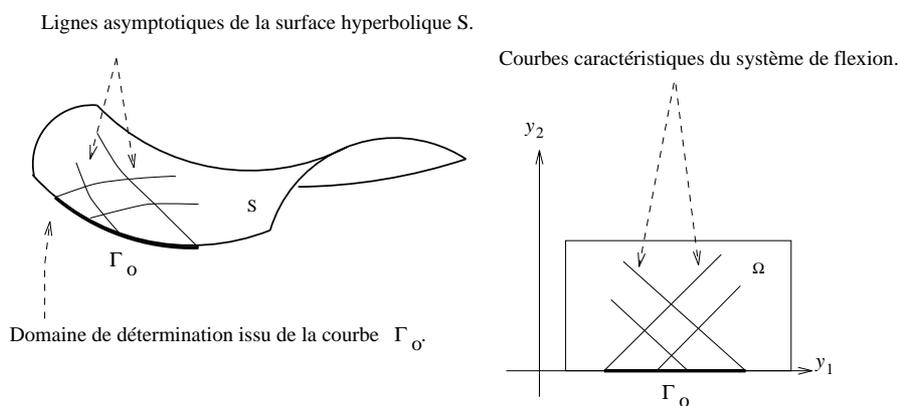


Figure 4.1.3.

*Preuve de la proposition 4.1.4 :* Dans le cas d'une surface hyperbolique, le système de flexion en coordonnées covariantes réduit (3.2.10) est de nature strictement hyperbolique. Le théorème 1.2.4 d'unicité du problème de Cauchy des systèmes linéaires hyperboliques du premier ordre nous indique alors l'inhibition de la surface dans le domaine de détermination issu de la donnée de Cauchy, *i.e.* issu de la courbe  $\Gamma$ . ■

**4.1.5. Remarque.** - La proposition 4.1.4 montre l'inhibition dans une région précise : le domaine de détermination  $D_d(\Gamma_o)$ . Si le reste de la surface est libre (de toutes conditions aux limites),  $S$  n'est pas inhibée, en général, en dehors de  $D_d(\Gamma_o)$ . Si bien qu'il existe des surfaces partiellement inhibées! Pour nous fixer les idées, considérons une surface uniformément hyperbolique  $S = (\Omega, \mathbf{r})$  telle que  $\Omega$  est un trapèze constitué d'un triangle rectangle  $T$  et d'un rectangle  $R$ , de sorte que l'hypoténuse  $h$  de  $T$  est transversale aux lignes asymptotiques de  $S$  et que les côtés de  $R$ , et les côtés de  $T$  (hormis l'hypoténuse) sont des lignes asymptotiques, voir figure 4.1.4.

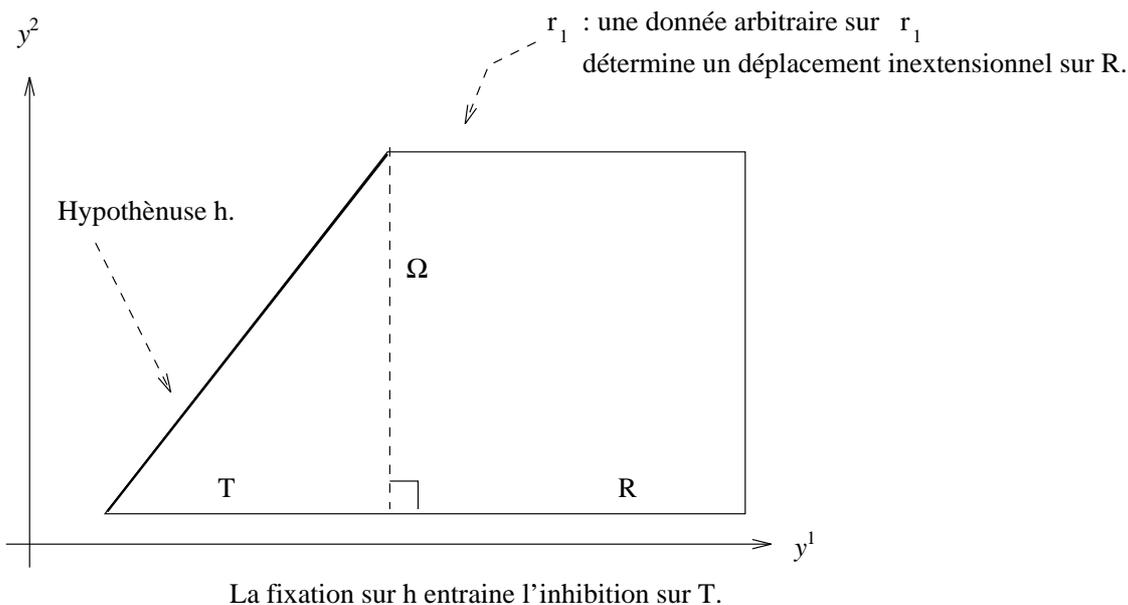


Figure 4.1.4.

Si bien que si  $S$  est fixée le long de l'hypoténuse  $h$ ,  $S$  est inhibée dans le triangle  $T$ , mais n'est pas inhibée dans le rectangle  $R$ . Cela est dû au fait que, pour tout déplacement inextensionnel arbitraire non trivial défini sur un côté  $r_1$  de  $R$  et pour un déplacement nul sur le côté commun à  $T$  et  $R$ , nous obtenons un problème de Goursat pour le système hyperbolique (3.2.10). Le théorème d'existence et unicité du problème de Goursat dégénéré, cf. proposition 1.2.6 et remarque 1.2.7, détermine alors sur  $R$  un déplacement inextensionnel non-trivial.  $\square$

**4.1.6. Remarque.** - Naturellement, dans la configuration de la proposition 4.1.4, si la surface hyperbolique  $S$  est entièrement incluse dans  $D_d(\Gamma_o)$ , alors  $S$  est inhibée. Par exemple, lorsque  $S$  est fixée partout sur son bord ( $\Gamma_o = \partial\Omega$ ), il est clair que pour tout point de  $S$ , les lignes asymptotiques issues de ce point rencontrent  $\Gamma_o$ . Mais la fixation sur tout le bord n'est pas nécessaire pour inhiber  $S$  ; prenons par exemple le cas d'un hyperboloïde à une nappe : il suffit de le fixer sur tout le sommet (ou toute la base) pour l'inhiber.  $\square$

Hyperboloïde à une nappe.

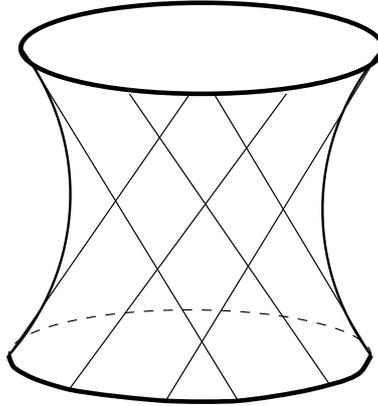


Figure 4.1.5.

Au vu de la proposition 4.1.4 et de la remarque 4.1.5, l'hypothèse de transversalité de  $\Gamma_0$  par rapport aux lignes asymptotiques est essentielle pour obtenir l'inhibition même partielle de la surface hyperbolique. Si la surface est fixée sur une ligne asymptotique, il est possible de déterminer un déplacement inextensionnel à partir d'une donnée arbitraire.

**4.1.7. Proposition.** - Soit  $S$  une surface hyperbolique et réglée (non-développable) définie par une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$  du type (2.5.1) (où les courbes à  $y^1$  constant sont les génératrices de  $S$ ) :

$$(4.1.3) \quad \mathbf{r}(y^1, y^2) = \mathbf{c}(y^1) + y^2 \mathbf{g}(y^1),$$

et soit  $\sigma$  une génératrice de  $S$  définie par  $y^1 = 0$ . Définissons de plus l'ensemble  $A(\sigma) \subset S$  constitué des lignes asymptotiques de  $S$  passant par  $\sigma$ .

On suppose que  $S$  est fixée sur  $\sigma$ . Alors dans  $A(\sigma)$ , un déplacement inextensionnel sur  $S$   $\mathbf{u}$  s'écrit sous la forme suivante, avec  $\rho \in L^2$  :

$$(4.1.4) \quad \mathbf{u}(y^1, y^2) = \int_0^{y^1} [\rho(\hat{y}^1) \mathbf{g}(\hat{y}^1)] \wedge [\mathbf{c}(y^1) - \mathbf{c}(\hat{y}^1) + y^2 \mathbf{g}(y^1)] d\hat{y}^1.$$

*Preuve de la proposition 4.1.7 :* Soit  $\mathbf{u}$  un déplacement inextensionnel sur  $S$ ,  $\omega$  son champ de rotation infinitésimale associé et  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \mathbf{R}(\mathbf{u}) \in \mathbf{R}(S)$  les dérivées partielles premières de  $\omega$ . Par hypothèse  $\mathbf{u}$  est nul sur  $\sigma$  et donc également  $\mathbf{u}_2$ , autrement dit :

$$\omega \wedge \mathbf{a}_2 = 0 \text{ le long de } \sigma,$$

d'où, en dérivant le long de  $\sigma$ , puisque  $\mathbf{a}_2$  est constante le long des génératrices :

$$\mathbf{w}_2 \wedge \mathbf{a}_2 = 0 \text{ le long de } \sigma.$$

Or, d'après la remarque 3.5.9, la dérivée le long d'une ligne asymptotique d'un champ de rotation infinitésimale est transversale à cette ligne asymptotique, d'où :

$$(4.1.5) \quad \mathbf{w}_2 = 0 \text{ le long de } \sigma.$$

Donnons nous une autre carte de  $S$ , que nous notons encore (abusivement)  $(\Omega, \mathbf{r})$ , telle que les courbes coordonnées soient les lignes asymptotiques de  $S$  et oublions provisoirement la carte (4.1.3). Nous supposons, sans perte de généralité, que les génératrices sont encore les courbes définies à  $y^1$  constant. Dans ce système de coordonnées, d'après la proposition 2.4.3, les coefficients de la seconde forme fondamentale se simplifient :

$$b_{11} = b_{22} = 0 \text{ et } b_{12} \neq 0.$$

Le système de flexion dérivé (3.5.1)-(3.5.2) devient alors, d'après la proposition 3.5.8 :

$$(4.1.6) \quad \begin{aligned} w_{2,1}^1 &= -\Gamma_{11}^1 w_2^1 + \Gamma_{22}^1 w_1^2 \\ w_{1,2}^2 &= \Gamma_{11}^2 w_2^1 - \Gamma_{22}^2 w_1^2 \\ w_1^1 &= w_2^2 = 0. \end{aligned}$$

D'autre part,  $S$  étant de plus réglée, d'après la proposition 2.5.5, nous avons également :

$$\Gamma_{22}^1 = 0.$$

Si bien que la première équation de (4.1.6) devient :

$$(4.1.7) \quad w_{2,1}^1 = -\Gamma_{11}^1 w_2^1 \text{ sur } \Omega.$$

Mais d'après (4.1.5), le champ  $\mathbf{w}_2$  (en tant que dérivée de  $\omega$  le long de  $\sigma$ ) est nul le long de  $\sigma$ , c'est-à-dire :

$$(4.1.8) \quad w_2^1(0, y^2) = 0 \text{ pour tout } \mathbf{r}(0, y^2) \text{ dans } \sigma.$$

Autrement dit, la composante  $w_2^1$  est une solution de l'équation différentielle ordinaire (4.1.7) avec une donnée initiale nulle (4.1.8). Elle est alors nulle partout dans le domaine de  $\Omega$  (connexe) défini à partir de  $\sigma$  et suivant les lignes asymptotiques issues de  $\sigma$ , c'est-à-dire dans  $A(\sigma)$ .

Nous avons donc montré que le champ  $\mathbf{w}_2$  (en tant que dérivée de  $\omega$  dans la direction des génératrices) est identiquement nul sur  $A(\sigma)$ .

Reprenons maintenant la carte (4.1.3). D'après ce qui précède, pour les composantes contravariantes des champs  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathbf{R}(S)$ , nous avons :

$$(4.1.9) \quad w_2^1 = 0 \text{ et } w_2^2 = 0 \text{ sur } A(\sigma),$$

si bien que l'équation (3.5.2) donne de plus :

$$(4.1.10) \quad w_1^1 = 0 \text{ sur } A(\sigma).$$

Et dans  $A(\sigma)$ , le système (3.5.1) devient:

$$(4.1.11) \quad \begin{cases} \Gamma_{22}^1 w_1^2 & = 0 \\ w_{1,2}^2 + \Gamma_{22}^2 w_1^2 & = 0 \\ b_{22} w_1^2 & = 0. \end{cases}$$

Mais dans une carte du type (4.1.3) nous avons de plus, d'après la proposition 2.5.2 :

$$\begin{aligned} b_{22} &= 0 \\ \Gamma_{22}^\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Si bien que le système (4.1.11) se réduit à :

$$(4.1.12) \quad w_{2,2}^1 = 0.$$

Autrement dit,  $w_2^1 = \rho(y^1)$  et donc  $\mathbf{w}_1 = \rho(y^1)\mathbf{a}_2$  avec  $\rho \in L^2$  arbitraire. L'expression (3.4.9) de la proposition 3.4.4 se réduit alors à l'expression (4.1.4). ■

**4.1.8. Proposition.-** *Soit  $S$  une surface réglée développable fixée sur une partie  $\Gamma_\circ$  de son bord, transversale aux génératrices de  $S$ . Alors  $S$  est rigide dans le domaine  $B(\Gamma_\circ)$  constitué par les génératrices de  $S$  issues de  $\Gamma_\circ$ . □*

*Preuve :* Soit  $\mathbf{u}$  un déplacement inextensionnel sur  $S$  et soit  $\omega$  son champ de rotation associé. Il est, par définition, possible de se ramener à une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$  du type :

$$\mathbf{r}(y^1, y^2) = \mathbf{c}(y^1) + y^2 \mathbf{g}(y^1).$$

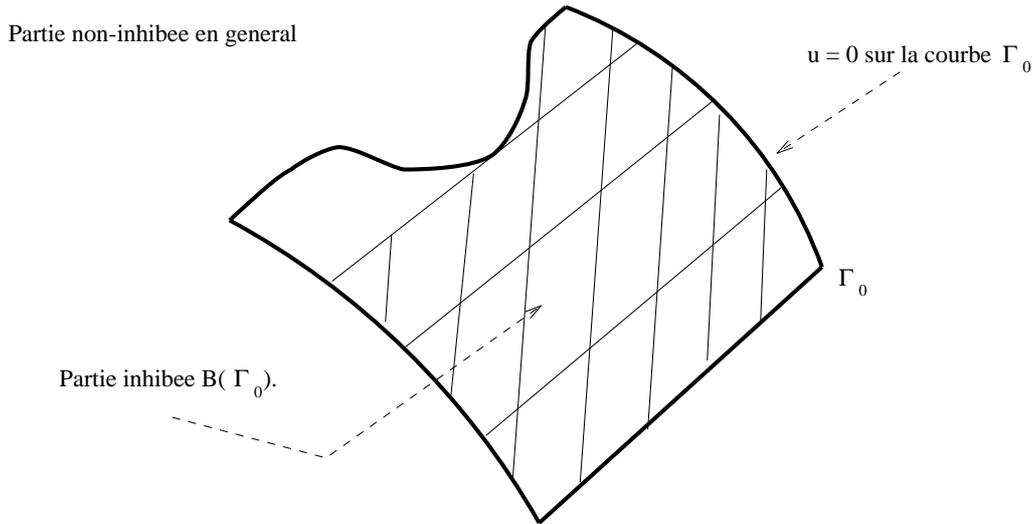


Figure 4.1.6.

Nous pouvons choisir, sans perte de généralité, la directrice à  $y^2 = 0$  contenant  $\Gamma_0$ . D'après le théorème 3.6.1, il existe des fonctions  $\rho_1 \in H^1(y^1)$  et  $\rho_2 \in L^2(y^2)$  telles que  $\mathbf{u}$  s'écrive :

$$\mathbf{u}(y^1, y^2) = \int_0^{y^1} [\rho_1(\hat{y}^1) \mathbf{c}'(\hat{y}^1) + \rho_2(\hat{y}^1) \mathbf{g}(\hat{y}^1)] \wedge [\mathbf{c}(y^1) - \mathbf{c}(\hat{y}^1) + y^2 \mathbf{g}(y^1)] d\hat{y}^1.$$

Si bien que la condition de fixation (4.1.1) entraîne facilement :  $\rho_1 = 0$  et  $\rho_2 = 0$  sur le domaine délimité par les génératrices issues de  $\Gamma_0$ , c'est-à-dire dans  $B(\Gamma_0)$ . ■

**4.1.9. Remarque.** - Pour obtenir l'inhibition de la surface par une condition cinématique, il n'est pas nécessaire que la courbe à laquelle on impose une condition cinématique soit au bord de la surface. Les propositions 4.1.1, 4.1.2, 4.1.4, 4.1.7 et 4.1.8 restent vraies pour une courbe fixée, interne à la surface. □

**4.1.10. Remarque.** - Tous ces cas d'inhibition (propositions 4.1.1, 4.1.2, 4.1.4, 4.1.7 et 4.1.8) s'étendent à une condition de rigidité de  $\Gamma_0$  au lieu de la condition de fixation. En effet, si on impose sur  $\Gamma_0$  un mouvement rigide :

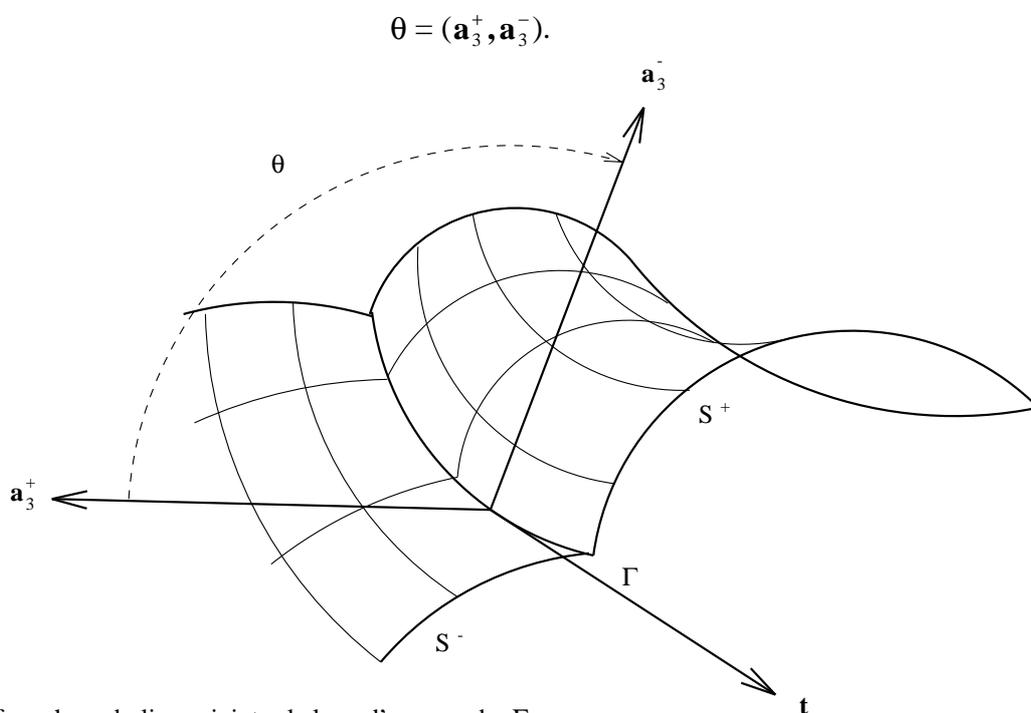
$$\mathbf{u} = \mathbf{c} \wedge \mathbf{r} + \mathbf{d} \quad \text{sur } \Gamma_0,$$

il suffit de poser  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{c} \wedge \mathbf{r} + \mathbf{d}$  pour retrouver la condition de fixation (4.1.1) pour  $\tilde{\mathbf{u}}$ . De tels cas se rencontrent et nous verrons plus précisément dans la section 4 de ce chapitre (théorème 4.4.4) que pour une surface avec un pli qui est une ligne asymptotique d'une des parties (hyperbolique) adjacentes au pli, alors le pli est rigide, ce qui entraîne alors des cas de rigidification (locale au moins) sur l'autre partie de S

adjacente au pli. Par ailleurs nous verrons, dans la section 5 de ce chapitre, des exemples de surfaces avec deux plis qui sont rigides.  $\square$

## 4.2. SURFACES AVEC UN PLI. CONDITION D'ANGLE FIXE.

Soit  $S$  une surface présentant un pli le long de la courbe  $\Gamma$ . C'est une surface dont deux parties, de classe  $C^2$ ,  $S^+$  et  $S^-$  sont jointes le long d'une courbe commune  $\Gamma$ . De part et d'autre de  $\Gamma$  les plans tangents respectivement à  $S^+$  et  $S^-$  forment un angle  $\theta$ , qu'on suppose régulière et différent de 0 et de  $\pi$ , tout au long de la courbe de pli :



Deux surfaces hyperboliques jointes le long d'une courbe  $\Gamma$

Figure 4.2.1

La surface  $S$  peut être considérée paramétrée par deux cartes  $(\overline{\Omega}^+, \mathbf{r}^+)$  et  $(\overline{\Omega}^-, \mathbf{r}^-)$  où  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  sont deux ouverts connexes de  $\mathbf{R}^2$  et  $\mathbf{r}^+$  et  $\mathbf{r}^-$  sont de classe  $C^2$ . Pour des raisons de simplicité, on suppose que  $\overline{\Omega}^+ \cap \overline{\Omega}^- = \Gamma$  (on commet ici un abus de notation puisque  $\Gamma$  indique la courbe du pli ainsi que la partie de  $\mathbf{R}^2$  la définissant) avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^+(\overline{\Omega}^+) &= S^+ \\ \mathbf{r}^-(\overline{\Omega}^-) &= S^- \\ S^+ \cap S^- &= \Gamma. \end{aligned}$$

La courbe  $\Gamma$  peut être définie à l'aide d'un paramètre  $s$  :

$$\Gamma = \{ \tilde{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}[y^1(s), y^2(s)], s \in I \subset \mathbf{R} \},$$

où  $I$  est un intervalle borné de  $\mathbf{R}$ , les fonctions  $[y^1(s), y^2(s)]$  sont régulières et injectives.

Dans le cas d'une courbe  $\Gamma$  non rectiligne, nous définissons les vecteurs  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  (où  $\mathbf{t}$  est le vecteur unitaire tangent à  $\Gamma$ ,  $\mathbf{n}$  est la normale principale unitaire et  $\mathbf{b}$  est le vecteur binormal) qui forment le trièdre de Frenet associé à  $\Gamma$ .

Dans ce qui suit, par analogie avec la notation  $S^+$  et  $S^-$  des parties de  $S$  adjacentes au pli, les variables ou les champs de vecteurs avec un "+" en exposant (resp. un "-" ) se rapporteront à la portion de surface  $S^+$  (resp.  $S^-$ ).

Soit  $\mathbf{u}$  un champ de déplacement inextensionnel de  $S$ , c'est un déplacement sur  $S$  tel que la restriction de  $\mathbf{u}$  à chaque portion régulière de  $S$  est un champ de déplacement inextensionnel. De même pour  $\boldsymbol{\omega}$  le champ de rotation infinitésimale associé, c'est un champ tel que la restriction de  $\boldsymbol{\omega}$  à chaque portion régulière de  $S$  est un champ de rotation infinitésimale.

De façon classique nous considérons deux types de conditions à l'interface :

- **Pli à appui simple** : la continuité du déplacement le long du pli est imposée, sans condition sur la variation de l'angle  $\theta$ ,

$$(4.2.1) \quad \mathbf{u}^+|_{\Gamma} = \mathbf{u}^-|_{\Gamma}.$$

- **Pli à angle fixe** : la continuité du déplacement le long du pli est imposée, avec la condition d'angle fixe (c'est à dire que l'angle que forment les plans tangents adjacents au pli ne varie pas - au sens linéarisé - au cours de la déformation),

$$(4.2.2) \quad \mathbf{u}^+|_{\Gamma} = \mathbf{u}^-|_{\Gamma} \quad \text{et} \quad \delta\theta = 0,$$

où  $\delta\theta$  désigne la variation *linéarisé* de l'angle de pli  $\theta$ , après déformation.

Nous devons remarquer que la continuité du déplacement  $\mathbf{u}$  le long du pli n'entraîne pas la continuité du champ de rotation associé  $\boldsymbol{\omega}$ . La continuité du déplacement induit, de façon classique (cf. [Vekua,59] p. 464), une condition à l'interface sur le champ de rotation infinitésimale associé :

**4.2.1. Proposition.** - Soit  $S$  une surface avec un pli le long d'une courbe  $\Gamma$ . Soient  $\mathbf{u}$  un déplacement inextensionnel sur  $S$  continu et  $\boldsymbol{\omega}$  son champ de rotation associé. Alors le saut de  $\boldsymbol{\omega}$  le long de  $\Gamma$  est tangente à  $\Gamma$ . De plus, il est proportionnel à la variation  $\delta\theta$  de l'angle  $\theta$  après déformation le long du pli :

$$(4.2.3) \quad [\boldsymbol{\omega}^+ - \boldsymbol{\omega}^-]_{|\Gamma} = \delta\theta \mathbf{t}. \quad \square$$

La proposition 4.2.1 induit immédiatement un critère de la condition de pli à angle fixe :

**4.2.2. Proposition** - Un déplacement inextensionnel  $\mathbf{u}$ , d'une surface avec un pli  $\Gamma$ , est à angle fixe si et seulement si son champ de rotation infinitésimale associé  $\boldsymbol{\omega}$  est continu le long du pli :

$$(4.2.4) \quad \boldsymbol{\omega}^+_{|\Gamma} = \boldsymbol{\omega}^-_{|\Gamma}. \quad \square$$

*Preuve de la proposition 4.2.1 :* Dérivons la condition de continuité du déplacement (4.2.1) par rapport au paramètre  $s$  (i.e. dans la direction de la courbe de pli) :

$$(4.2.5) \quad \frac{d\mathbf{u}^+}{ds} = \frac{d\mathbf{u}^-}{ds},$$

c'est à dire d'après (3.4.1) :

$$(4.2.6) \quad \boldsymbol{\omega}^+ \wedge \frac{d\mathbf{r}^+}{ds} = \boldsymbol{\omega}^- \wedge \frac{d\mathbf{r}^-}{ds}.$$

Ce qui s'écrit encore :

$$(4.2.7) \quad [\boldsymbol{\omega}^+ - \boldsymbol{\omega}^-] = \mu \mathbf{t},$$

où nous allons montrer que le coefficient  $\mu$  est la variation linéarisé  $\delta\theta$  de l'angle  $\theta$ , après déformation. Considérons la variation linéarisée des triplets orthonormaux  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  et  $(\mathbf{t}, \mathbf{a}_3, \mathbf{l})$ , où  $\mathbf{l}$  est le vecteur tangent à  $S$  perpendiculaire à  $\mathbf{t}$  de sorte que  $\mathbf{a}_3 = \mathbf{l} \wedge \mathbf{t}$ . Par analogie avec  $\theta$  et  $\delta\theta$ , nous désignons dans ce qui suit la variation d'une quantité en gardant la même notation précédé d'un  $\delta$ . D'après (3.4.1), nous avons :

$$(4.2.8) \quad \delta\mathbf{t} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{t}$$

$$(4.2.9) \quad \delta\mathbf{l} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{l}.$$

D'où :

$$(4.2.10) \quad \delta\mathbf{a}_3 = \delta\mathbf{l} \wedge \mathbf{t} + \mathbf{l} \wedge \delta\mathbf{t} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{a}_3.$$

D'autre part, si nous notons l'angle  $\phi$  formé par la normale à la surface et la normale principale à la courbe :

$$\phi^+ = (\mathbf{n}, \mathbf{a}_3^+),$$

nous avons les relations :

$$(4.2.11) \quad \begin{aligned} \mathbf{n} &= \mathbf{a}_3^+ \cos(\phi) - \mathbf{l} \sin(\phi) \\ \mathbf{b} &= \mathbf{l} \cos(\phi) + \mathbf{a}_3^+ \sin(\phi). \end{aligned}$$

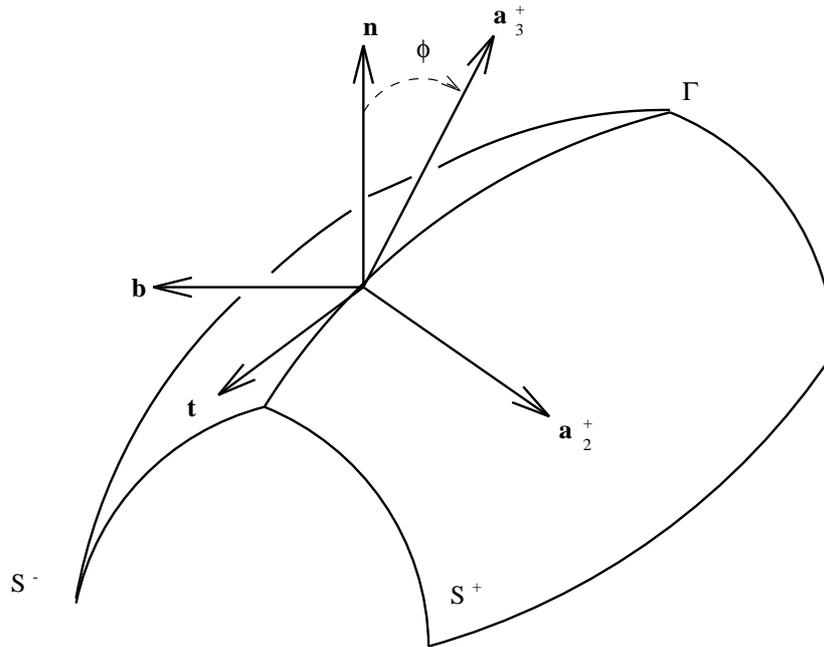


Figure 4.2.2

Les relations (4.2.8)-(4.2.11) donnent :

$$(4.2.12) \quad \delta \mathbf{n} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{n} - \delta \phi \mathbf{b}$$

$$(4.2.13) \quad \delta \mathbf{b} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{b} + \delta \phi \mathbf{n}.$$

Considérant ces variations des deux cotés du pli, en écrivant que la variation  $\delta \mathbf{n}$  est la même sur les deux cotés du pli, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{n}^+ - \delta \mathbf{n}^- &= 0 \\ &= (\boldsymbol{\omega}^+ - \boldsymbol{\omega}^-) \wedge \mathbf{n} - \delta(\phi^+ - \phi^-) \mathbf{b} \\ &= (\boldsymbol{\mu} \mathbf{t}) \wedge \mathbf{n} - \delta(\phi^+ - \phi^-) \mathbf{b}. \end{aligned}$$

D'où, finalement :  $\boldsymbol{\mu} = \delta(\phi^+ - \phi^-) = \delta \theta$ . ■

Introduisons maintenant une nouvelle condition équivalente à la condition d'angle fixe, exprimée pour les dérivées de champ de rotation, annoncée dans [Choi,93], essentielle dans la suite de ce mémoire.

**4.2.3. Proposition.** - *Soit  $S$  une surface avec un pli à angle fixe le long d'une courbe  $\Gamma$  non-rectiligne formant un angle différent de 0 et de  $\pi$ . Soit  $\omega$  un champ de rotation infinitésimale sur  $S$ , alors la trace de la dérivée de  $\omega$  le long de  $\Gamma$  a un sens (dans  $L^2$  ou dans  $H^{1/2}$ ). De plus, elle est **tangente** à  $\Gamma$ .*

*Preuve de la proposition 4.2.3 :* Commençons par une remarque concernant la trace de la dérivée d'un champ de rotation infinitésimal. A priori, elle n'a pas de sens puisqu'un champ de rotation est dans  $\mathbf{H}^1$  et donc sa dérivée est dans  $\mathbf{L}^2$ .

Notons  $S^+$  et  $S^-$  les deux parties de  $S$  adjacentes de part et d'autre du pli  $\Gamma$ . Supposons que la courbe de pli  $\Gamma$  est une ligne asymptotique pour  $S^+$  et pour  $S^-$ , l'hypothèse de pli non-rectiligne implique alors que le plan osculateur en chaque point de  $\Gamma$  est confondu avec les deux plans tangents à  $S^+$  et  $S^-$ , ce qui est impossible puisque ces plans tangents forment un angle différent de 0 et de  $\pi$ .

Ainsi, dans la configuration de l'énoncé, nous pouvons remarquer que la courbe de pli  $\Gamma$  est transverse aux lignes asymptotiques pour au moins une des deux parties adjacentes au pli de  $S$ , disons  $S^+$ .

Si bien que le corollaire 3.5.12 (pour  $S^+$  hyperbolique), la remarque 3.6.2 (pour  $S^+$  développable) et la proposition 3.5.14 (pour  $S^+$  elliptique) montrent que la trace sur  $\Gamma$  de la dérivée d'un champ de rotation infinitésimal a un sens (dans  $L^2(\Gamma)$ ,  $L^2(\Gamma)$  et  $H^{1/2}(\Gamma)$  respectivement).

Nous pouvons maintenant dériver, le long du pli  $\Gamma$ , la condition d'angle fixe (4.2.3). Il vient alors que le saut de la dérivée d'un champ de rotation infinitésimale le long du pli est nul.

Or, d'après la proposition 3.5.1, ces champs, dérivées partielles d'un champ de rotation infinitésimale, sont tangents à la surface. Cela implique que la dérivée d'un champ de rotation infinitésimale le long d'un pli à angle fixe se situe dans l'intersection des plans tangents adjacents : c'est à dire dans la direction tangente à la courbe de pli puisque par hypothèse, les plans tangents aux portions de surface adjacentes ne coïncident pas le long du pli. ■

Autrement dit, dans la configuration de la proposition 4.2.3, sur une carte telle que  $\Gamma$  soit définie comme une courbe coordonnée à  $y^2 = \text{constante}$ , pour un élément

$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$  de  $\mathbf{R}(S)$ ,  $\mathbf{w}_1$  représente la dérivée, le long du pli  $\Gamma$ , d'un champ de rotation infinitésimale. La condition d'angle fixe implique alors, d'après la proposition 4.2.3, la relation (qui a un sens des deux côtés du pli) :

$$(4.2.14) \quad \mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{a}_1 = 0 \text{ le long de } \Gamma.$$

**4.2.4. Remarque** - Dans la démonstration précédente, nous avons montré que l'hypothèse d'un pli non-rectiligne formant un angle différent de 0 et de  $\pi$  exclut la possibilité d'une jonction entre deux surfaces "dégénérées" le long de  $\Gamma$  (i.e.  $\Gamma$  est une ligne asymptotique des deux surfaces adjacentes au pli). Il est par ailleurs facile de voir que si l'angle de pli est  $\pi$  et que les deux surfaces jointes sont "dégénérées" le long de  $\Gamma$ , alors  $\Gamma$  (non-rectiligne) est nécessairement plane ; par exemple, deux tores joints l'un sur l'autre le long de leur courbe asymptotique (la courbe au sommet ou à la base du tore).  $\square$

Terminons cette section par le cas où la courbe de pli est plane :

**4.2.5. Proposition.** - *Soit  $S$  une surface avec un pli à angle fixe le long d'une courbe  $\Gamma$  formant un angle  $\theta$  différent de 0 et de  $\pi$ . Si la courbe de pli  $\Gamma$  est plane non-rectiligne, alors la restriction à  $\Gamma$  d'un déplacement inextensionnel sur  $S$  est un déplacement normal au plan de  $\Gamma$  modulo un déplacement rigide.*

*Preuve* : Nous présentons ici, une démonstration valable pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbf{G}$  qui complète celle de [Geymonat et Sanchez-Palencia,95] (qui était formelle dans certain cas) :

Soit  $(\Omega, \mathbf{r})$  une carte de  $S$  telle que la courbe de pli  $\Gamma$  soit décrite par la courbe coordonnée à  $y^2 = 0$ . Soit  $\mathbf{u}$  un déplacement inextensionnel sur  $S$  et soit  $\omega$  le champ de rotation infinitésimale associé. D'après la proposition 3.4.4, nous avons l'expression explicite de  $\mathbf{u}$  sur  $\Gamma$ , modulo un déplacement rigide :

$$(4.2.14) \quad \mathbf{u}(y^1, 0) = \int_0^{y^1} \omega_{,1}(t, 0) \wedge [\mathbf{r}(y^1, 0) - \mathbf{r}(t, 0)] dt.$$

Soit  $P$ , le plan de la courbe plane  $\Gamma$ , il est bien défini puisque la courbure de  $\Gamma$  est supposée non nulle. Il est clair que l'expression  $[\mathbf{r}(y^1, 0) - \mathbf{r}(t, 0)]$  est dans le plan  $P$ , pour tout  $t$ . D'autre part, d'après la proposition 4.2.3, la trace de la dérivée  $(\omega_{,1}(t, 0))$  a un sens et est tangente à  $\Gamma$ . Elle est donc parallèle au plan  $P$ . Si bien que l'expression (4.2.14) indique que  $\mathbf{u}$  est normal au plan  $P$ , modulo un déplacement rigide.  $\blacksquare$

**4.2.6. Remarque.** - Dans la configuration de la proposition 4.2.5 (courbe de pli plane non-rectiligne), si une partie  $S^+$  de  $S$ , adjacente au pli, est uniformément hyperbolique

(au voisinage de  $\Gamma$ ), alors  $\Gamma$  ne peut pas être une ligne asymptotique de  $S^+$ . En effet, cela signifierait que de plus les plans tangents à  $S^+$  coïncident le long de  $\Gamma$  et alors que la seconde forme fondamentale est nulle le long de  $\Gamma$ , contraire à l'hypothèse d'hyperbolicité.  $\square$

### 4.3. EXEMPLES DE SURFACES INHIBÉES ET DE SURFACES NON INHIBÉES AVEC UN PLI.

Un des effets attendus de la présence d'un pli à appui simple ou à angle fixe est une restriction sévère des déplacements inextensionnels admissibles, voire l'inhibition de la surface.

Une restriction de l'espace  $\mathbf{G}$  est claire par la proposition 4.2.3 qui restreint de façon explicite les éléments admissibles de l'espace  $\mathbf{R}(S)$  (isomorphe à  $\mathbf{G}$ ). Dans le cas d'un pli à angle fixe, elle est encore plus explicite si, de plus, la courbe de pli est plane : voir la proposition 4.2.4. La restriction des déplacements inextensionnels va naturellement dépendre de la configuration géométrique de la surface et du pli, ce qui nous donne une quantité de cas possibles.

Il n'y a pas de résultats généraux, pratiquement tous les cas de figures sont possibles : il existe un exemple de surface inhibée par un pli à appui simple (théorème 4.3.1b), il existe des surfaces avec un pli à angle fixe où les deux parties adjacentes ne sont pas inhibées (proposition 4.3.5 et 4.3.6). Il existe même un exemple de surface présentant un pli à angle fixe telle qu'une des deux parties régulières adjacentes est inhibée tandis que l'autre ne l'est pas (section suivante, corollaire 4.4.8).

Dans ce qui suit, lorsqu'on dira qu'une surface  $S^+$  admet un pli sur une courbe  $\Gamma$ , cela voudra dire que la surface  $S^+$  est jointe à une autre surface a priori quelconque, le long de la courbe  $\Gamma$ , formant un pli, d'angle  $\theta$  différent de 0 et de  $\pi$ . On désignera par  $S^-$  la surface adjacente.

#### CAS D'UN CÔNE ADMETTANT UN PLI.

**4.3.1a. Théorème.** - *Soit  $S^+$ , un cône de sommet  $\mathbf{X}$  (contenu dans  $S^+$ ) avec une directrice  $\Gamma$ , jointe le long de  $\Gamma$  à une surface  $S^-$  quelconque, constituant une surface  $S$  présentant un pli sur  $\Gamma$ , formant un angle différent de 0 et de  $\pi$ . Si le pli est à angle fixe, alors le cône  $S^+$  est inhibée.*

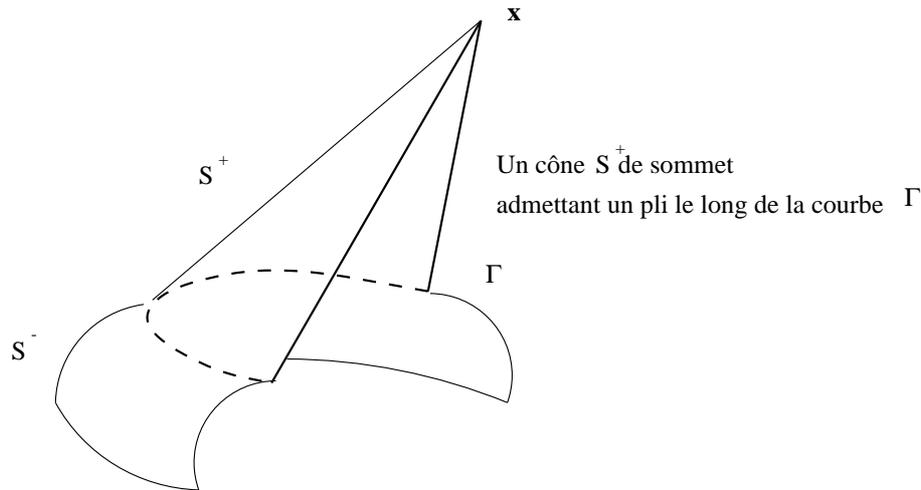


Figure 4.3.1a.

*Preuve du théorème 4.3.1a :* Choisissons une carte de  $S^+$  de la forme (3.6.8) telle que  $\Gamma$  soit décrite par la directrice  $y^2 = 0$ . D'après la proposition 3.6.2, un déplacement inextensionnel sur un cône s'écrit sous la forme (3.6.9) et les champs  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$  de  $\mathbf{R}(S^+)$  sont de la forme (3.6.10) :

$$\mathbf{w}_1 = \rho(y^1) \mathbf{a}_2$$

$$\mathbf{w}_2 = 0.$$

D'autre part, d'après la proposition 4.2.3, la condition d'angle fixe impose, le long de  $\Gamma$  :

$$\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{a}_1 = 0,$$

$$\Rightarrow \mathbf{w}_1 = 0 \text{ le long de } \Gamma,$$

$$\text{d'où : } \rho(y^1) \equiv 0.$$

Si bien que  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = (0, 0)$ , ce qui veut dire que  $S^+$  est inhibée.

**4.3.1b. Théorème.** - *Dans la configuration du théorème 4.3.1a, mais en supposant que le pli est maintenant à appui simple, si  $S^-$  est également un cône (contenant le sommet), alors  $S$  est quasi-inhibée (plus précisément : inhibée à un degré de liberté près).  $\square$*

*Preuve du théorème 4.3.1b :* Choisissons une carte de  $S^-$  de la forme (3.6.8) telle que  $\Gamma$  soit décrite par la courbe coordonnée  $y^2 = 0$ .

Soit  $\mathbf{u}$  un déplacement inextensionnel sur  $S$ , le long de  $\Gamma$  nous avons :

$$\mathbf{u}^+(y^1, 0) = \int_0^{y^1} \rho^+(t) \mathbf{g}^+(t) \wedge (\mathbf{c}(y^1) - \mathbf{c}(t)) dt$$

$$\mathbf{u}^-(y^1, 0) = \int_0^{y^1} \rho^-(t) \mathbf{g}^-(t) \wedge (\mathbf{c}(y^1) - \mathbf{c}(t)) dt$$

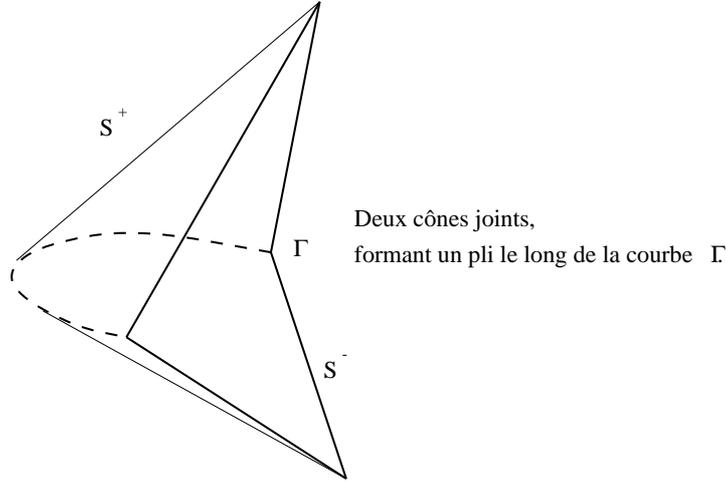


Figure 4.3.1b.

La continuité du déplacement sur  $\Gamma$  donne :

$$(4.3.1) \quad \int_0^{y^1} (\rho^+(t) \mathbf{g}^+(t) - \rho^-(t) \mathbf{g}^-(t)) dt \wedge \mathbf{c}'(y^1) = 0.$$

Nous pouvons donc poser :

$$\int_0^{y^1} (\rho^+(t) \mathbf{g}^+(t) - \rho^-(t) \mathbf{g}^-(t)) dt = f(y^1) \mathbf{c}'(y^1).$$

En dérivant l'expression précédente par rapport à  $y^1$ , il vient :

$$(4.3.2) \quad \rho^+(y^1) \mathbf{g}^+(y^1) - \rho^-(y^1) \mathbf{g}^-(y^1) = f'(y^1) \mathbf{c}'(y^1) + f(y^1) \mathbf{c}''(y^1).$$

Or, nous avons :

$$\mathbf{c}''(y^1) = \Gamma_{11}^{1+} \mathbf{c}'(y^1) + \Gamma_{11}^{2+} \mathbf{g}^+ + b_{11}^+ \mathbf{a}_3^+,$$

si bien que (4.3.2) devient :

$$\rho^+(y^1) \mathbf{g}^+(y^1) - \rho^-(y^1) \mathbf{g}^-(y^1) = f'(y^1) \mathbf{c}'(y^1) + f(y^1) [\Gamma_{11}^{1+} \mathbf{c}'(y^1) + \Gamma_{11}^{2+} \mathbf{g}^+ + b_{11}^+ \mathbf{a}_3^+].$$

En posant de plus :

$$\mathbf{g}^-(y^1) = g_1(y^1) \mathbf{c}'(y^1) + g_2(y^1) \mathbf{g}^+(y^1) + g_3(y^1) \mathbf{a}_3^+,$$

et en identifiant suivant les directions  $\mathbf{g}^+$ ,  $\mathbf{c}'$  et  $\mathbf{a}_3^+$ , nous obtenons le système :

$$(4.3.3) \quad \begin{cases} \rho^-(y^1)g_1(y^1) + \Gamma_{11}^{1+} f(y^1) + f'(y^1) = 0 \\ \rho^+(y^1) = f(y^1)\Gamma_{11}^{2+} + \rho^-(y^1)g_2(y^1) \\ f(y^1)b_{11}^+ + \rho^-(y^1)g_3(y^1) = 0. \end{cases}$$

En combinant la deuxième et la troisième équation de (4.3.3) nous pouvons déduire  $\rho^+$  en fonction de  $\rho^-$  :

$$(4.3.4) \quad \rho^+(y^1) = -\rho^-(y^1) \left( \frac{\Gamma_{11}^{2+} g_3(y^1)}{b_{11}^+} - g_2(y^1) \right),$$

et d'après la première équation de (4.3.3) la fonction  $f$  doit vérifier l'équation différentielle ordinaire homogène :

$$(4.3.5) \quad g_3(y^1)f'(y^1) + \left( g_3(y^1)\Gamma_{11}^{1+} - g_1(y^1)b_{11}^+ \right) f(y^1) = 0.$$

L'ensemble des solutions de (4.3.5) forme un espace vectoriel de dimension 1 et la troisième équation du système (4.3.3) donne  $\rho^-$  en fonction de  $f$ , si bien que l'espace  $\mathbf{G}$ , modulo les déplacements rigides est de dimension au plus 1. ■

**4.3.2. Remarque.** - Dans le théorème 4.3.1, si les deux cônes sont fermés, c'est à dire si la surface  $S$  est sans bord hormis les sommets des cônes, alors  $S$  est inhibée. En effet dans ce cas là, l'équation différentielle (4.3.5) devrait avoir une solution périodique ce qui n'est possible que pour une solution nulle, d'où l'inhibition. □

CAS D'UNE SURFACE DEVELOPPABLE ADMETTANT UN PLI.

**4.3.3. Proposition.** - Soit  $S$  une surface développable jointe à une autre surface formant un pli à angle fixe le long d'une courbe  $\Gamma$  transversale aux génératrices. Si on suppose que  $S$  n'est pas inhibée, alors en choisissant une carte de  $S$  comme en (3.6.1) avec  $\Gamma$  pour directrice en  $y^2 = 0$ , modulo un déplacement rigide, tout déplacement inextensionnel  $\mathbf{u}$  s'écrit sous la forme :

$$(4.3.6) \quad \mathbf{u}(y^1, y^2) = \int_0^{y^1} [\rho_1(\hat{y}^1) \mathbf{c}'(\hat{y}^1)] \wedge [\mathbf{c}(y^1) - \mathbf{c}(\hat{y}^1) + y^2 \mathbf{g}(y^1)] d\hat{y}^1.$$

où  $\rho_1 \in H^1(\Gamma)$ .

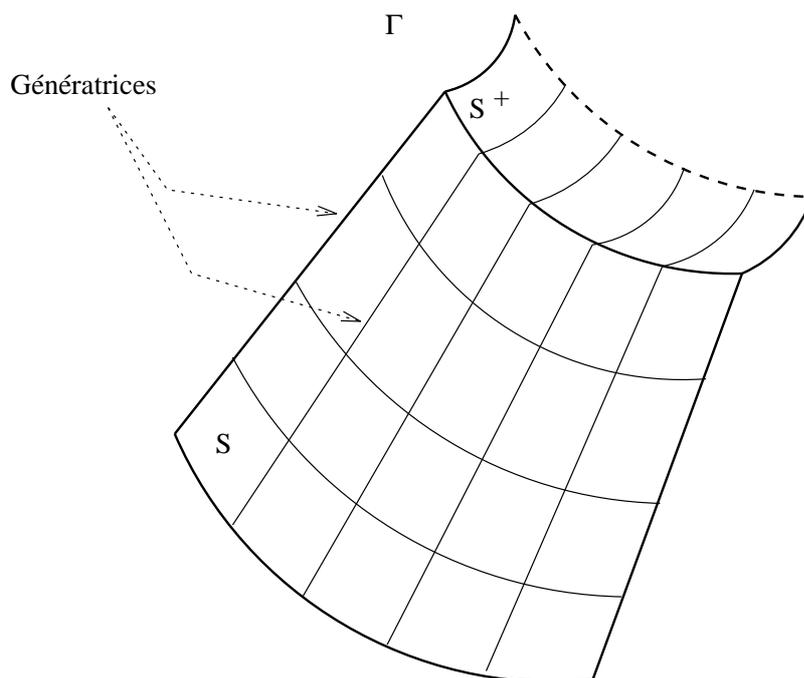


Figure 4.3.2.

*Preuve* : D'après la proposition 3.6.1, tout déplacement inextensionnel peut s'écrire sous la forme (3.6.2) et tout couple de champ  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$  de  $\mathbf{R}(S)$  peut s'écrire sous la forme (3.6.5) :

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1 = \rho_1(y^1)E(y^1, y^2)\mathbf{a}_1 + [F(y^1, y^2) + \rho_2(y^1)]\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{w}_2 = -\rho_1(y^1)E(y^1, y^2)\mathbf{a}_1, \end{cases}$$

avec  $E$  et  $F$  définies comme en (3.6.4) choisies, sans perte de généralité, telles que :

$$E(0, y^2) = 1 \text{ et } F(y^1, 0) = 0,$$

de sorte que  $F$  est nulle sur  $\Gamma$ .

La condition d'angle fixe donne alors, d'après la proposition 4.2.3 :

$$\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{a}_1 = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\rho_2(y^1)\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_1(y^1, 0) = 0.$$

Autrement dit :  $\rho_2 \equiv 0$  et (3.6.5) devient :

$$(4.3.7) \quad \begin{cases} \mathbf{w}_1 = \rho_1(y^1)E(y^1, y^2)\mathbf{a}_1 + F(y^1, y^2)\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{w}_2 = -\rho_1(y^1)E(y^1, y^2)\mathbf{a}_1. \end{cases}$$

En remplaçant alors dans (3.6.2), nous obtenons (4.3.6). ■

**4.3.4. Commentaire.** - Dans la configuration précédente,  $S^+$  n'est pas inhibée en général. En effet, il suffit, pour une fonction  $\rho_1$  non-nulle définissant un déplacement inextensionnel sur  $S^+$  comme en (4.3.6), que la trace sur le pli du champ de rotation associé constitue une donnée de Cauchy (satisfaisant à la condition d'angle fixe (4.2.14)) admissible pour le système de flexion dérivé de  $S^-$  ou vice versa. On peut par exemple prendre la partie adjacente  $S^-$  également développable, si bien que la proposition s'y applique également. Une fonction  $\rho_1$  définit alors de part et d'autre des déplacements inextensionnel du type (4.3.6) et satisfaisant à la condition d'angle fixe. Nous verrons, dans l'exemple qui suit, que nous pouvons également prendre  $S^-$  de nature hyperbolique. □

#### CAS D'UNE SURFACE HYPERBOLIQUE ADMETTANT UN PLI.

Considérons  $S^+$  une surface hyperbolique simplement connexe ; c'est à dire qu'il existe une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$  de  $S^+$  où  $\Omega$  est un ouvert simplement connexe de  $\mathbf{R}^2$ . On suppose que  $S^+$  admet un pli à angle fixe le long d'une courbe  $\Gamma$  régulière du bord de  $S^+$ , transversale aux lignes asymptotiques de  $S^+$  ; ce qui exclue notamment les cas de courbes fermées (sinon, il y aurait forcément au moins 4 points dont les tangentes à la courbes seraient des directions asymptotiques).

On suppose de plus que  $S^-$  est également simplement connexe et que les deux surfaces sont libres de toute condition aux limites. Nous allons voir des exemples où  $S^+$  et  $S^-$  ne sont pas inhibées.

**4.3.5. Proposition.** - *Dans la configuration décrite ci-dessus, si de plus  $S$  est hyperbolique et  $\Gamma$  est également transversale aux lignes asymptotiques de  $S$ , alors il existe des déplacements inextensionnels non-triviaux et satisfaisant à la condition d'angle fixe.*

*Preuve :* Puisque  $\Gamma$  est transversale aux lignes asymptotiques de  $S^+$  et  $S^-$ , elle est une courbe libre (non-caractéristique) pour les systèmes de flexion respectifs. Cela étant également vrai pour les systèmes de flexion dérivés caractérisant les éléments de  $\mathbf{R}(S^+)$  et de  $\mathbf{R}(S^-)$  (pour des cartes données).

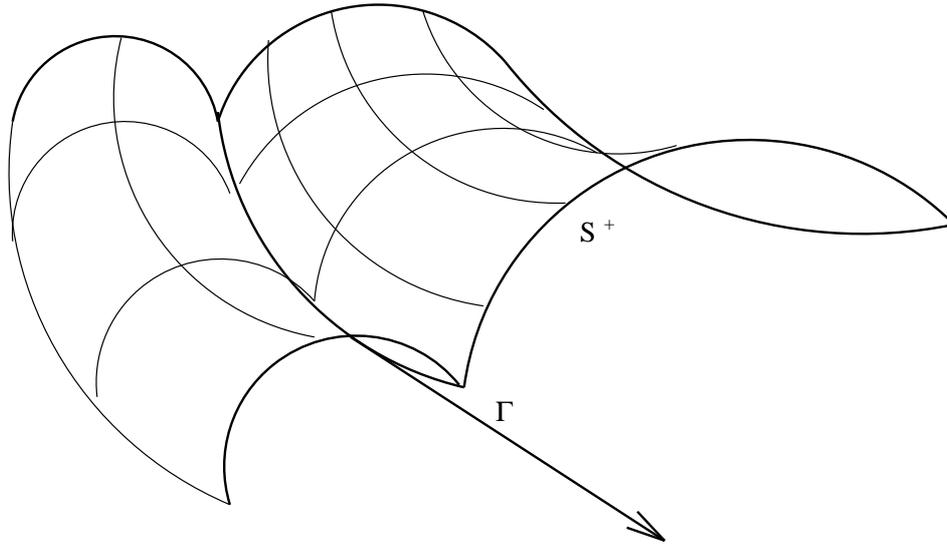
Deux surfaces hyperboliques jointes le long d'une courbe  $\Gamma$ 

Figure 4.3.3.

Choisissons une carte de  $S^+$  (resp. une carte de  $S^-$ ) telle que les courbes coordonnées soient les lignes asymptotiques de  $S^+$  (resp.  $S^-$ ). D'après la proposition 3.5.8, le système de flexion dérivé se réduit à (3.5.4)-(3.5.5) :

$$\begin{aligned} w_{2,1}^1 &= -\Gamma_{11}^1 w_2^1 + \Gamma_{22}^1 w_1^2 \\ w_{1,2}^2 &= \Gamma_{11}^2 w_2^1 - \Gamma_{22}^2 w_1^2 \end{aligned}$$

(4.3.8)  $w_1^1 = w_2^2 = 0.$

Supposons que  $\Gamma$  soit décrite par une fonction  $\varphi^\pm : \Gamma = \{ (y^1, y^2) \in \Omega^\pm / y^2 = \varphi^\pm(y^1) \}$ , d'après la proposition 4.2.3, la condition d'angle fixe est équivalente à :

$$(4.3.9) \quad [\mathbf{w}_1 + \varphi' \mathbf{w}_2] \wedge [\mathbf{a}_1 + \varphi' \mathbf{a}_2] = 0.$$

Mais grâce aux simplifications de (3.5.5), (4.3.9) est équivalent à (de part et d'autre du pli) :

$$(4.3.10) \quad w_1^2(y^1, \varphi(y^2)) = \varphi'^2(y^1) w_2^1(y^1, \varphi(y^2)).$$

Ainsi, une fonction arbitraire définie dans  $L^2(\Gamma)$  va constituer, via la condition d'angle fixe (4.3.10), une donnée de Cauchy pour les système de flexion dérivé (4.3.8)

respectifs. L'existence et l'unicité d'une solution du problème de Cauchy pour un système hyperbolique montre alors l'existence d'un déplacement inextensionnel non-nul ; il y en a même un espace de dimension infini. ■

**4.3.6. Proposition.** - *La proposition 4.3.5 reste vraie si  $S^-$  est une surface développable.*

*Preuve :* Remarquons tout d'abord que la courbe  $\Gamma$  étant transversale aux lignes asymptotiques de  $S^+$ , elle est également transversale aux génératrices de  $S^-$ .

En reprenant les éléments de la démonstration précédente sur  $S^+$ , nous obtenons le système (4.3.8) et la condition d'angle fixe (4.3.10). D'autre part, sur  $S^-$ , d'après la proposition 4.3.3, les déplacements inextensionnels s'écrivent sous la forme (4.3.6). Si bien qu'une fonction arbitraire définie dans  $H^1(\Gamma)$  suffit à définir, de part et d'autre du pli, un déplacement inextensionnel et satisfaisant à la condition d'angle fixe. Comme précédemment, l'espace des déplacements inextensionnels admissible est même de dimension infinie. ■

**4.3.7. Remarque.** - Dans les propositions 4.3.5. et 4.3.6, il est essentiel de supposer que la courbe de pli  $\Gamma$  est transversale aux lignes asymptotiques. Dans le cas contraire, où  $\Gamma$  est une ligne asymptotique de  $S^+$ , nous verrons que le pli devient rigide (théorème 4.4.4) et rigidifie localement  $S^-$  (quelle que soit sa nature si  $\Gamma$  est non-rectiligne - corollaire 4.4.8 -). □

#### CAS D'UNE SURFACE ELLIPTIQUE ADMETTANT UN PLI.

**4.3.8. Théorème.** - *Soit  $S^+$  une surface uniformément elliptique de bord  $\Gamma$  jointe à une surface  $S^-$  quelconque, constituant une surface avec un pli sur  $\Gamma$ , formant un angle différent de 0 et de  $\pi$ . Si le pli est à angle fixe, alors  $S^+$  est inhibée.*

Nous renvoyons à [Vekua,59] théorème 4.10.10, pour une démonstration du théorème 4.3.8 qui utilise la théorie des fonctions analytiques généralisées (ou fonctions pseudo-analytiques). La condition d'angle fixe y apparaissant comme posant un problème du type Riemann-Hilbert (dans un sens généralisé aux fonctions pseudo-analytiques).

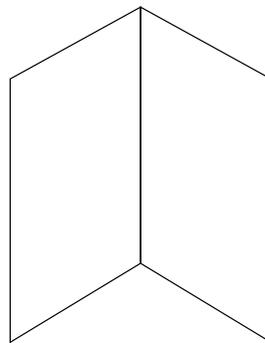
#### 4.4. UN CAS DE RIGIDITE D'UNE COURBE D'UN PLI NON-RECTILIGNE.

Nous présentons dans cette section, l'un de nos principaux résultats (le théorème 4.4.4) où, dans une configuration tout à fait particulière, nous démontrons qu'un pli non-rectiligne peut être rigide lorsqu'elle est une ligne asymptotique. Il s'agit de la rigidité de la courbe elle-même, ce qui n'implique pas nécessairement la rigidité des surfaces adjointes (corollaire 4.4.8). C'est un résultat qui souligne le rôle particulier et fondamental que jouent les lignes asymptotiques en théorie des déplacements inextensionnels. Pour fixer les idées, considérons d'abord le cas classique d'un pli rectiligne.

#### RIGIDITE D'UN PLI RECTILIGNE.

Soit  $S$  une surface constituée de deux parties planes jointes le long d'une arête  $\Gamma$  formant un pli qui est alors un segment rectiligne.

Il est connu que si le pli forme un angle différent de  $0$  et de  $\pi$  alors la droite  $\Gamma$  se comporte comme un segment rigide. En effet, il suffit de se rappeler que les déplacements inextensionnels sur un plan sont (modulo un déplacement rigide) des déplacements normaux au plan, si bien que la condition de continuité du déplacement sur  $\Gamma$  entraîne que le déplacement doit être rigide sur  $\Gamma$ .



Un pli droit.

Figure 4.4.1

C'est une propriété familière, qu'on observe lorsqu'une feuille de papier est pliée, l'arête de pli est "dure". Cette propriété, d'arêtes droites rigides, est en fait générale, sans supposer que les parties adjacentes sont planes (voir [Geymonat et Sanchez-Palencia,95]). Par exemple, elles peuvent être réglées comme dans le cas du conoïde de Wallis, elles peuvent même être dégénérées (c'est à dire que les plans tangents aux surfaces coïncident le long du pli, si bien que la courbure totale de la surface est nulle le long du pli, cf. lemme 4.4.2) :

Un conoïde de Wallis.

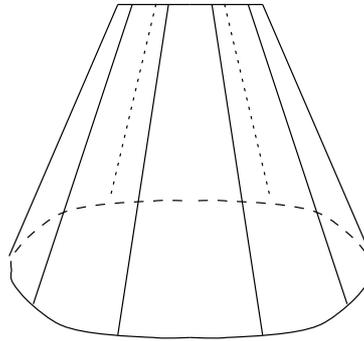


Figure 4.4.2

**4.4.1. Théorème.** - Soit  $S$  une surface constituée de deux parties régulières jointes le long d'une arête rectiligne  $\Gamma$ , formant un pli à appui simple d'angle  $\theta$ , différent de 0 et de  $\pi$ , alors la droite  $\Gamma$  est rigide.  $\square$

Nous présentons ici une démonstration qui complète celle de [Geymonat et Sanchez,95] qui était formelle (dans certain cas) car utilisant la trace sur  $\Gamma$  de dérivées secondes d'un déplacement, qui est dans  $H^2(\Omega)$  a priori. Nous utiliserons la notion de champ de rotation infinitésimale et deux résultats intermédiaires, présentés sous forme de lemmes et que nous démontrons en annexe (section 6 de ce chapitre).

**4.4.2. Lemme.** - Soit une surface  $S$  de classe  $C^2$  et un segment de droite  $\Gamma$  sur  $S$ , au voisinage de  $\Gamma$ , nous avons l'alternative :

- ou bien, la surface est hyperbolique (dans un voisinage du pli),
- ou bien, les plans tangents coïncident le long de  $\Gamma$ .  $\square$

**4.4.3. Lemme.** - Dans la configuration du lemme 4.4.2., si les plans tangents coïncident le long de  $\Gamma$ , la composante normale à  $S$ , d'un champ de rotation infinitésimale sur  $S$ , est constante sur  $\Gamma$ . Autrement dit, à un champ constant près, un champ de rotation infinitésimale est tangent à  $S$  le long de la courbe de pli  $\Gamma$ .  $\square$

*Démonstration du théorème 4.4.1 :* Choisissons une carte  $S = (\Omega, \mathbf{r})$ , telle que :

$$(4.4.1) \quad \Gamma = \{\mathbf{r}(y^1, 0) = y^1 \mathbf{x}\},$$

où  $\mathbf{x}$  est un vecteur constant, qu'on peut prendre unitaire (ainsi, le vecteur tangent unitaire à  $\Gamma$  est  $\mathbf{x}$ ). Supposons, sans perte de généralité, que la base covariante  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  est orthonormale le long de  $\Gamma$  ( $\mathbf{a}_1 = \mathbf{x}$  le long de  $\Gamma$ ).

Soient  $S^+$  et  $S^-$  les deux parties adjacentes au pli et soient  $\mathbf{u}$  un déplacement inextensionnel sur  $S$  et  $\boldsymbol{\omega}$  le champ de rotation qui lui est associé, il suffit d'intégrer la relation (3.4.2) :

$$\mathbf{u}_{,1} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{a}_1,$$

pour obtenir l'expression de  $\mathbf{u}$  sur le long du pli  $\Gamma$  :

$$(4.4.2) \quad \mathbf{u}(y^1, 0) = \int_0^{y^1} \boldsymbol{\omega}(\hat{y}^1, 0) \wedge \mathbf{x} d\hat{y}^1 + \text{déplacement rigide.}$$

La continuité du déplacement  $\mathbf{u}$  le long du pli entraîne alors :

$$(4.4.3) \quad \llbracket \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x} \rrbracket = 0,$$

où le double crochet  $\llbracket \cdot \rrbracket$  désigne le saut à l'interface (le long du pli).

D'après l'alternative du lemme 4.4.2, pour une surface avec un pli droit formant un angle, il nous suffit de considérer deux configurations (A et B) possibles :

Configuration A - Les deux parties adjacentes au pli  $S^+$  et  $S^-$  sont dans le cas du lemme 4.4.3. C'est-à-dire que sur les surfaces respectives, les plans tangents coïncident le long du pli  $\Gamma$ . Si bien que, de part et d'autre de  $\Gamma$ , la composante normale d'un champ de rotation infinitésimale est constante sur  $\Gamma$ .

Si on note  $\boldsymbol{\omega}^+ = w_+^1 \mathbf{a}_1^+ + w_+^2 \mathbf{a}_2^+ + Cte \mathbf{a}_3^+$  et  $\boldsymbol{\omega}^- = w_-^1 \mathbf{a}_1^- + w_-^2 \mathbf{a}_2^- + Cte \mathbf{a}_3^-$ , la relation de continuité (4.4.3) entraîne :

$$(4.4.4) \quad w_+^2 \mathbf{a}_2^+ - w_-^2 \mathbf{a}_2^- = \mathbf{Cte} \text{ sur } \Gamma,$$

où  $Cte$  (resp.  $\mathbf{Cte}$ ) est une constante (resp. un vecteur constant de  $\mathbf{R}^3$ ), non nécessairement identique à chaque occurrence.

Les vecteurs  $\mathbf{a}_2^+$  et  $\mathbf{a}_2^-$  n'étant pas colinéaires en  $\Gamma$  (puisque le pli forme l'angle  $\theta$  différent de 0 et de  $\pi$ ), la relation (4.4.4) implique que les composantes  $w_+^2$  et  $w_-^2$  sont constantes le long de  $\Gamma$ , d'où :

$$(4.4.5) \quad \boldsymbol{\omega}^+ \wedge \mathbf{x} = \mathbf{Cte} \text{ sur } \Gamma. \quad (\text{resp. } \boldsymbol{\omega}^- \wedge \mathbf{x} = \mathbf{Cte} \text{ sur } \Gamma).$$

Et l'expression (4.4.2) indique alors que le déplacement est rigide sur  $\Gamma$ .

Configuration B - Au moins une des deux parties adjacentes au pli  $\Gamma$  est hyperbolique au voisinage de  $\Gamma$ , disons  $S^+$ .

$S^+$  étant hyperbolique, et  $\Gamma$  étant de fait une ligne asymptotique de  $S^+$ , la trace sur  $\Gamma$  d'un champ de rotation infinitésimale sur  $S^+$  a bien un sens dans  $H^1(\Gamma)$  (voir le corollaire 3.5.8). Ainsi, la relation de continuité (4.4.3) implique qu'il en est de même pour un champ de rotation infinitésimale sur  $S^-$ . Du moins, nous pouvons dériver (4.4.3) le long de  $\Gamma$  et obtenir :

$$(4.4.6) \quad \left[ \left[ \omega_{,1}(y^1, 0) \wedge \mathbf{x} \right] \right] = 0.$$

Or, d'après la proposition 3.5.1, les dérivées d'un champ de rotation infinitésimale sont tangentes à la surface. Et par hypothèse, les plans tangents des surfaces adjacentes au pli  $\Gamma$  forment un angle différent de 0 et de  $\pi$ . Nous déduisons donc de (4.4.6) :

$$(4.4.7) \quad \omega_{,1}^+(y^1, 0) \wedge \mathbf{x} = 0 \text{ (resp. } \omega_{,1}^-(y^1, 0) \wedge \mathbf{x} = 0).$$

Et d'après l'expression (4.4.2), la restriction sur  $\Gamma$  du déplacement inextensionnel  $\mathbf{u}$  est un déplacement rigide. ■

Bien que l'arête droite soit rigide, les surfaces adjacentes ne sont en général pas inhibées. Ceci est dû au fait qu'une ligne droite est une ligne asymptotique, donc une caractéristique pour le système de flexion des deux parties adjacentes. On peut penser en tant qu'exemple à deux surfaces réglées jointes le long d'une génératrice, sans aucune autre condition, la surface n'est pas inhibée (voir la proposition 4.1.7).

#### UN CAS DE RIGIDITE D'UN PLI NON-RECTILIGNE.

La propriété de pli rigide n'est pas exclusive aux plis droits. En général, une courbe de pli, gauche, n'est pas rigide sauf si elle est une ligne asymptotique. C'est une propriété curieuse des lignes asymptotiques que nous avons annoncé dans [Choi,93] :

**4.4.4 Théorème.** - *Soit  $S$  une surface avec un pli à angle fixe avec un angle de pli  $\theta$  différent de 0 et  $\pi$ . Soient  $S^+$  et  $S^-$  les deux parties adjacentes au pli. On suppose de plus que la courbe de pli  $\Gamma$  est une ligne asymptotique de l'une des deux portions de surface, disons  $S^+$ , qui est hyperbolique. Alors la courbe de pli  $\Gamma$  est rigide en déplacement inextensionnel. □*

*Preuve du théorème 4.4.4 :* Ecartons tout d'abord le cas où  $\Gamma$  est rectiligne puisque le théorème 4.4.1. donne alors la conclusion, sans même l'hypothèse d'angle fixe.

Nous supposons donc que  $\Gamma$  n'est pas rectiligne. Dans la portion de surface hyperbolique que nous notons  $S^+$ , et pour laquelle  $\Gamma$  est une ligne asymptotique, choisissons un paramétrage  $\mathbf{r}$  tel que les courbes coordonnées soient les lignes asymptotiques de  $S^+$ , entraînant les simplifications des coefficients de la seconde forme fondamentale de la surface :

$$(4.4.8) \quad b_{11} = b_{22} = 0.$$

Dans un tel système de coordonnées, d'après la proposition 3.5.8, le système de flexion dérivé (3.5.1)-(3.5.2), satisfait par les composantes contravariantes  $(\mathbf{w}_\alpha = w_\alpha^\lambda \mathbf{a}_\lambda)$  de tout élément  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$  de  $\mathbf{R}(S^+)$ , devient :

$$(4.4.8) \quad \begin{aligned} w_{2,1}^1 &= \Gamma_{22}^1 w_1^2 - \Gamma_{12}^1 w_2^1 \\ w_{1,2}^2 &= \Gamma_{11}^2 w_2^1 - \Gamma_{22}^2 w_1^2 \end{aligned}$$

avec 
$$w_1^1 = w_2^2 = 0.$$

La proposition 4.2.3 nous indique que  $\mathbf{w}_1$  admet une trace sur  $\Gamma$  et qu'elle est tangente au pli  $\Gamma$ , c'est-à-dire:

$$\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{a}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad w_1^2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma,$$

autrement dit : 
$$\mathbf{w}_1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Ce qui implique, d'après la proposition 2.4.4, que la courbe de pli est rigide. ■

**4.4.5. Remarque.** - Si  $\Gamma$  n'est pas une droite, elle ne peut pas non plus être une courbe plane. En effet, si  $\Gamma$  est une ligne asymptotique plane de  $S^+$ , le plan tangent à  $S^+$  est confondu avec le plan osculateur de  $\Gamma$ , c'est-à-dire le plan de la courbe. Autrement dit, la normale unitaire  $\mathbf{a}_3$  est constante le long de  $\Gamma$ , ou encore qu'on aurait :

$$b_{12} = 0 \quad \text{le long de } \Gamma.$$

D'après (4.4.8), cela signifierait que tous les coefficients de la seconde forme fondamentale sont nuls le long de  $\Gamma$ , c'est-à-dire que la courbure totale de  $S^+$  est nulle, contraire à l'hypothèse d'hyperbolicité de  $S^+$ . □

**4.4.6. Remarque.** - Lorsque la courbe de pli  $\Gamma$  n'est pas un segment de droite, elle ne peut pas être, non plus, une ligne asymptotique de  $S^-$ . En effet, puisque la  $\Gamma$  n'est pas une droite, le plan osculateur de  $\Gamma$  devrait être confondu avec les plans tangents à la surface de part et d'autre de  $\Gamma$ , ce qui est impossible puisque, par hypothèse, elles forment un angle différent de 0 et de  $\pi$ . □

**4.4.7. Remarque.** - Dans le théorème 4.4.4, aucune hypothèse n'a été faite sur l'autre partie,  $S^-$ , adjacente au pli et qui peut donc être a priori quelconque. Cependant, d'après les deux remarques précédentes, lorsque le pli  $\Gamma$  n'est pas une droite,  $S^-$  ne peut pas être plane au voisinage de  $\Gamma$ .  $\square$

D'après la remarque 4.4.6, dans la configuration du théorème 4.4.4, si la courbe de pli  $\Gamma$  n'est pas rectiligne, alors elle est transversale aux éventuelles lignes asymptotiques de  $S^-$ . Ainsi, d'après la proposition 4.1.1 et la remarque 4.1.7, puisque le théorème 4.4.4 indique que la courbe  $\Gamma$  est rigide, nous avons immédiatement le corollaire :

**4.4.8. Corollaire.** *Dans la configuration du théorème 4.4.4. si la courbe de pli  $\Gamma$  n'est pas rectiligne, alors  $S^-$  est inhibée (ou rigide) au voisinage de  $\Gamma$ , pourvu qu'elle soit de classe  $C^3$ .*

**4.4.9. Remarque.** - L'hypothèse de régularité  $C^3$  est requise par le théorème d'unicité de Carleman (théorème 1.1.11) lorsque la surface  $S^-$  est elliptique.  $\square$

Bien entendu, dans le corollaire 4.4.8, l'inhibition de  $S^-$  au voisinage du pli  $\Gamma$  peut être précisé suivant sa nature géométrique.

Par exemple, si  $S^-$  est uniformément elliptique, alors suivant la proposition 4.1.2,  $S^-$  est entièrement inhibée.

Si  $S^-$  est uniformément hyperbolique, alors suivant la proposition 4.1.4,  $S^-$  est inhibée dans le domaine de détermination  $D_d(\Gamma)$ , délimité par les lignes asymptotiques issues de  $\Gamma$ . Naturellement  $S^-$  est entièrement inhibée si elle est contenue dans ce domaine.

Si  $S^-$  est développable, suivant la proposition 4.1.8,  $S^-$  est inhibée dans le domaine de  $S^-$  constitué par les génératrices passant par  $\Gamma$ .

**4.4.10. Commentaire.** - Le corollaire 4.4.8 indique la rigidité de la surface adjacente au pli du théorème 4.4.4. Il faut garder à l'esprit que, sans aucune autre condition aux limites,  $S^+$  n'est pas inhibée. Comme dans le cas des plis droits, c'est dû au fait que la rigidité se situe sur une ligne asymptotique, donc sur une courbe caractéristique des divers systèmes de flexion. Ces derniers étant du type hyperbolique, l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Goursat (théorème 1.2.6), montre qu'il existe des déplacements non-triviaux sur  $S^+$ ,  $\mathbf{G}$  est même de dimension infinie; c'est ce que nous

avons explicité dans le cas d'une surface hyperbolique réglée dans la proposition 4.1.7.

□

La configuration du théorème 4.4.4 est donc tout à fait remarquable et particulière puisqu'il donne un exemple de surface avec un pli pour laquelle une partie des deux parties adjacentes au pli peut être entièrement inhibée tandis que l'autre partie admet des déplacements inextensionnel non-triviaux.

#### **4.5. RIGIDIFICATION DE CERTAINES SURFACES PAR DEUX PLS A ANGLE FIXE.**

Nous avons vu dans les sections 2, 3 et 4 de ce chapitre que la présence d'un pli à angle fixe pouvait rigidifier une surface, cf. théorème 4.3.1 et théorème 4.3.4. D'autre part, nous avons également exhibé des exemples où un seul pli à angle fixe restreignait de façon importante les déplacements inextensionnels admissibles, cf. proposition 4.2.3, proposition 4.2.5, proposition 4.3.3, sans toutefois inhiber la surface (commentaire 4.3.4, proposition 4.3.5 et proposition 4.3.6). Nous avons exhibé par ailleurs la situation particulière du théorème 4.4.4 avec le corollaire 4.4.8 qui nous donne un exemple de pli rigide, entraînant la seule rigidification (au moins partielle) d'une des deux surfaces adjacentes au pli (remarque 4.4.9), l'autre - la partie hyperbolique pour laquelle le pli est une ligne asymptotique - admettant des déplacements inextensionnels non-triviaux (commentaire 4.4.10).

Il nous a donc semblé naturel de penser qu'étant donné les effets d'un seul pli, nous pouvions nous attendre à obtenir des cas de rigidification avec un ou plusieurs plis supplémentaires.

Et nous avons trouvé, en collaboration avec E. Sanchez-Palencia, des exemples nouveaux - théorème 4.5.1 et théorème 4.5.3 - où la présence de deux plis à angle fixe suffit à entraîner l'inhibition (au moins partielle) dans le cas d'une surface réglée. Il s'agit des résultats annoncés dans [Choï et Sanchez-Palencia,93] où nous avons étudié séparément les cas développable et non-développable, puisque de nature fondamentalement différente (cf. proposition 3.2.2). D'autre part, nous exhibons un autre cas nouveau de rigidification - théorème 4.5.4 - qui est une généralisation du cas d'une surface réglée non-développable. C'est le cas d'une surface hyperbolique quelconque avec deux plis à angle fixe qui se rencontrent et avec pour seule hypothèse, essentielle, que la portion de surface (hyperbolique) considérée ne contient pas de ligne

asymptotique issue de l'intersection des deux plis. On dira également, pour exprimer cette hypothèse, qu'il n'y a pas de ligne asymptotique séparant les deux plis (PLASP).

Dans ce qui suit, lorsqu'on dira qu'une surface  $S$  admet un pli sur une courbe  $\Gamma$ , cela voudra dire que la surface  $S$  est jointe à une autre surface, a priori quelconque, le long de la courbe  $\Gamma$ , formant un pli d'angle  $\theta$  différent de 0 et de  $\pi$ . De même, on dira qu'une surface admet deux plis si elle est jointe à deux surfaces régulières ( $C^2$ ).

#### CAS D'UNE SURFACE REGLÉE ADMETTANT DEUX PLIS.

Soit  $S$  une surface réglée donnée par une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$  comme en (2.5.1) :

$$(4.5.1) \quad \mathbf{r}(y^1, y^2) = \mathbf{c}(y^1) + y^2 \mathbf{g}(y^1).$$

Les droites de  $S$  définies à  $y^1$  constant sont les génératrices, les courbes à  $y^2$  constant, transversales aux génératrices, sont des directrices (cf. chapitre 2 section 5).

Les cas développable et non-développable étant de nature fondamentalement différente, nous les étudions séparément.

**4.5.1. Théorème.** - *Soit  $S$  une surface réglée développable admettant deux plis à angle fixe le long des courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  transversales aux génératrices, avec des angles de pli différents de 0 et de  $\pi$ . Pour simplifier on suppose que le bord de  $S$  est constitué de génératrices et des courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Alors  $S$  est quasi-inhibée. Plus précisément,  $\mathbf{G} / \{\text{déplacements rigides}\}$  est de dimension au plus 1.  $\square$*

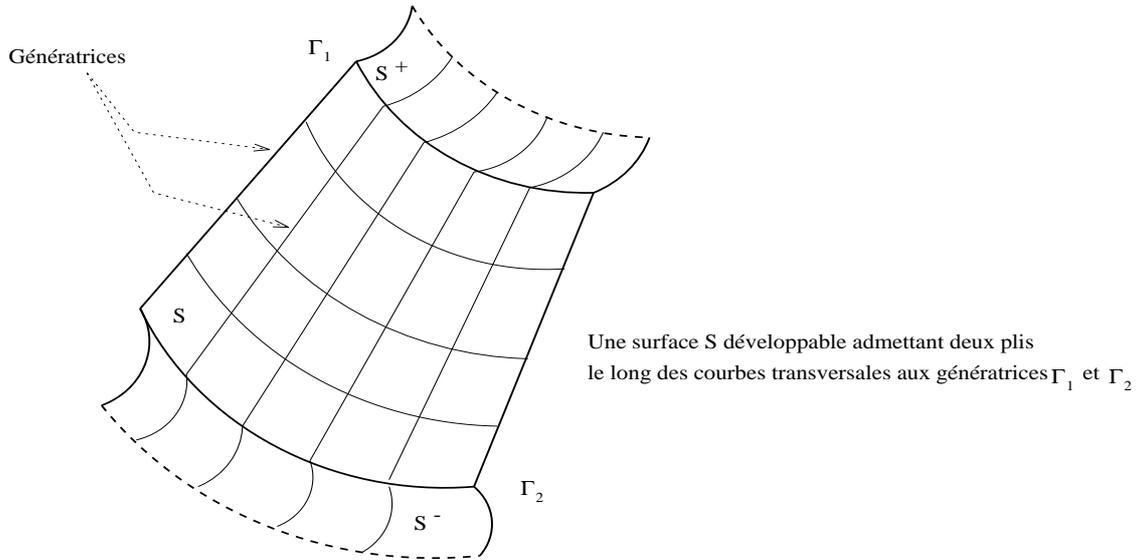


Figure 4.5.1.

*Preuve* : Choisissons tout d'abord la carte de  $S$  comme en (4.5.1) telle que la courbe de pli  $\Gamma_1$  est décrite par la directrice  $\mathbf{b}$ . D'après la proposition 4.3.3, nous avons les relations (4.3.7), avec  $\rho \in H^1$  :

$$(4.5.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \rho(y^1)E(y^1, y^2)\mathbf{a}_1 + F(y^1, y^2)\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{w}_2 &= -\rho(y^1)E(y^1, y^2)\mathbf{a}_2 \end{aligned}$$

où les fonctions  $F$  et  $E$  sont définis comme en (3.6.4) :

$$(4.5.3) \quad \begin{aligned} E(y^1, y^2) &= \exp\left(-\int_0^{y^2} 2\Gamma_{12}^1(y^1, \hat{y}^2)d\hat{y}^2\right) \\ F(y^1, y^2) &= \int_0^{y^2} (w_{1,1}^1 - 2\Gamma_{12}^2 w_1^1)(y^1, \hat{y}^2)dy^2, \end{aligned}$$

si bien qu'un déplacement inextensionnel est nécessairement de la forme (4.3.6) :

$$\mathbf{u}(y^1, y^2) = \int_0^{y^1} [\rho_1(\hat{y}^1)\mathbf{c}'(\hat{y}^1)] \wedge [\mathbf{c}(y^1) - \mathbf{c}(\hat{y}^1) + y^2 \mathbf{g}(y^1)]d\hat{y}^1.$$

Considérons le second pli à angle fixe en  $\Gamma_2$ , si celle-ci est décrite par :

$$\Gamma_2 = \{(y^1, y^2) / y^2 = \psi(y^1)\},$$

d'après la proposition 4.2.3, la condition d'angle fixe entraîne que, le long de  $\Gamma_2$ , la dérivée dans la direction tangente à  $\Gamma_2$  d'un champ de rotation infinitésimale est tangente à  $\Gamma_2$ , c'est-à-dire que nous avons :

$$(\mathbf{w}_1 + \Psi' \mathbf{w}_2) \wedge (\mathbf{a}_1 + \Psi' \mathbf{a}_2) = 0, \text{ le long de } \Gamma_2.$$

Autrement dit, d'après (4.5.2) :

$$\Psi' w_1^1 \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 + w_1^2 \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_1 + \Psi' w_2^2 \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_1 = 0.$$

Or nous avons  $w_1^1 + w_2^2 = 0$ , si bien que :

$$2\Psi' w_1^1 + w_1^2 = 0, \text{ le long de } \Gamma_2$$

$$\Rightarrow 2\Psi' \rho(y^1) E(y^1, y^2) + F(y^1, y^2) = 0.$$

Mais, d'après (4.5.3) :

$$F(y^1, y^2) = \int_0^{y^2} [\rho(y^1) E(y^1, \hat{y}^2)]_{,1} - 2\Gamma_{12}^2 \rho(y^1) E(y^1, \hat{y}^2) d\hat{y}^2,$$

si bien que la fonction  $\rho$  doit satisfaire à l'équation différentielle ordinaire :

$$(4.5.4) \quad a(y^1) \rho(y^1) + b(y^1) \rho'(y^1) = 0,$$

où les fonctions  $a$  et  $b$  sont :

$$\begin{aligned} a(y^1) &= 2\Psi'(y^1) E(y^1, \Psi(y^1)) + \int_0^{\Psi(y^1)} [E_{,1}(y^1, \hat{y}^2) - 2\Gamma_{12}^2 E(y^1, \hat{y}^2)] d\hat{y}^2 \\ b(y^1) &= \int_0^{\Psi(y^1)} E(y^1, \hat{y}^2) d\hat{y}^2. \end{aligned}$$

La fonction  $\rho$  est donc définie à un degré de liberté près ( $b$  n'est jamais nulle) :

$$(4.5.5) \quad \rho(y^1) = C \exp\left(\int_0^{y^1} -\left(\frac{a(\hat{y}^1)}{b(\hat{y}^1)}\right) d\hat{y}^1\right),$$

où  $C$  est une constante réelle *a priori* arbitraire. ■

**4.5.2. Remarque** - Le théorème 4.5.1 n'indique que la quasi-rigidité de  $S$ . Bien entendu dans de nombreux cas, la surface est en fait inhibée, cela dépend de la nature des surfaces adjacentes aux plis.

Par exemple, si l'une d'elles est hyperbolique et si la courbe de pli correspondante est tangente en un point aux lignes asymptotiques, d'après le théorème 4.4.4, la dérivée d'un champ de rotation infinitésimale dans la direction tangente est nulle, si bien que dans (4.5.5)  $\rho$  doit être identiquement nul.

D'autre part si  $S$  est inhibée, alors, d'après la proposition 4.4.1, les surfaces adjacentes le sont également (au voisinage du pli) si les courbes de pli ne sont pas des lignes asymptotiques de la surface adjacente correspondante, par exemple, une surface elliptique, serait totalement inhibée en vertu de la proposition 4.4.2.  $\square$

Considérons maintenant le cas d'une surface réglée non-développable avec deux plis. Rappelons qu'une telle surface est hyperbolique, cf. proposition 2.6.3.

**4.5.3. Théorème.** - Soit  $S$  une surface réglée non-développable définie comme en (4.5.1), qui admet un pli (à appui simple) le long d'un segment  $\sigma$  de la génératrice à  $y^1=0$ , et qui admet un deuxième pli (à angle fixe) le long d'un arc  $\Gamma$  de la directrice  $\mathbf{b}$  à  $y^2=0$ . Nous supposons que les plis forment un angle différent de 0 et de  $\pi$ .

Considérons l'ensemble  $A(\sigma) \subset S$  constitué des lignes asymptotiques de  $S$  passant par la courbe  $\sigma$  et l'ensemble  $B(\Gamma) \subset S$  constitué des génératrices passant par la courbe  $\Gamma$ .

Alors, la partie  $B(\Gamma) \cap A(\sigma)$  de  $S$  est inhibée.

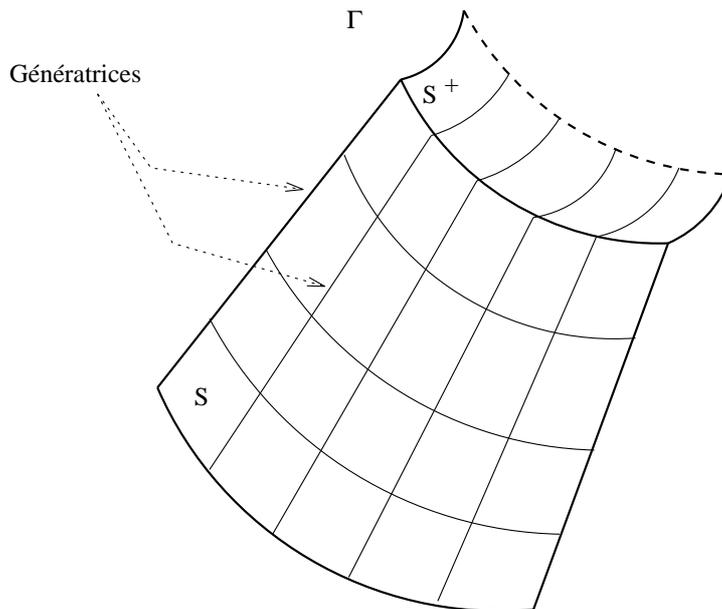


Figure 4.5.2.

*Preuve du théorème :* Soient  $\mathbf{u}$  un déplacement inextensionnel sur  $S$ ,  $\omega$  son champ de rotation infinitésimale associé et  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \mathbf{R}(\mathbf{u}) \in \mathbf{R}(S)$  les dérivées partielles premières de  $\omega$ . D'après le théorème 4.4.1, la courbe de pli  $\sigma$  étant rectiligne, la restriction de  $\mathbf{u}$  sur  $\sigma$  est un déplacement rigide. Ainsi, d'après la remarque 4.1.10 et la proposition 4.1.7, nous avons sur  $A(\sigma)$ , avec  $\rho \in L^2(\Gamma) \approx L^2$  :

$$(4.5.6) \quad \begin{aligned} \mathbf{w}_1(y^1, y^2) &= \rho(y^1) \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{w}_2(y^1, y^2) &= 0. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le pli en  $\Gamma$ . D'après la proposition 4.2.3, la condition d'angle fixe impose que la dérivée le long de  $\Gamma$  d'un champ de rotation infinitésimale doit être tangente à  $\Gamma$ , soit :

$$(4.5.7) \quad \mathbf{w}_1(y^1, 0) \wedge \mathbf{a}_1 = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

d'où  $\rho = 0$  sur  $\Gamma$  et donc  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = (0, 0)$  sur  $A(\sigma) \cap B(\Gamma)$ . ■

#### CAS D'UNE SURFACE HYPERBOLIQUE QUELCONQUE ADMETTANT DEUX PLIS.

Nous avons vu dans les sections 3 et 4 de ce chapitre qu'une surface hyperbolique avec un seul pli n'est pas en général inhibée, même partiellement.

Nous avons montré (théorème 4.5.3) qu'une surface réglée hyperbolique pouvait être inhibée par deux plis à angle fixe le long de deux courbes dont l'une est une génératrice (donc une ligne asymptotique).

Nous donnons maintenant une généralisation de ce cas d'inhibition à une surface hyperbolique générale et deux courbes de plis qui sont, soit des lignes asymptotiques, soit des courbes transversales aux lignes asymptotiques.

La configuration que nous allons présenter est toutefois sensiblement différente du cas développable, dans la mesure où nous supposerons que les deux plis se rejoignent en un point. Cela ne revient pas exactement à considérer un seul pli où la courbe de pli est constituée de deux morceaux réguliers et formant un angle, car la surface peut effectivement être jointe à deux surfaces distinctes.

La seule hypothèse, essentielle, que nous ferons est de supposer qu'il n'y a pas de ligne asymptotique issue du point où les deux courbes de pli régulières se rejoignent. Nous dirons aussi qu'il n'y a pas de ligne asymptotique séparant les deux plis (PLASP).

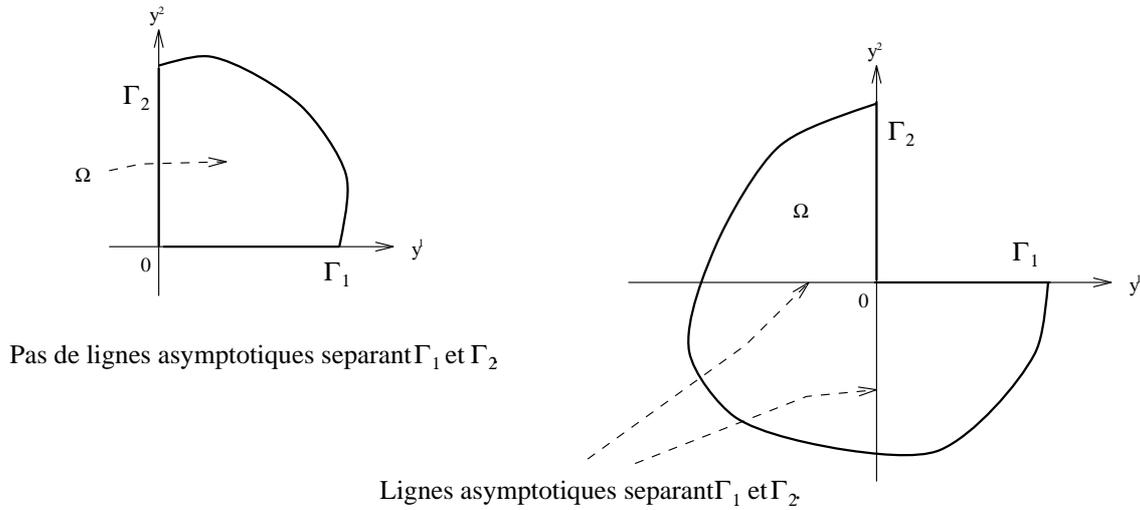


Figure 4.5.3.

Commençons dans cette configuration, sous la condition qu'il n'y ait pas de ligne asymptotique séparant les plis, dans le cas particulier où les courbes des deux plis à angle fixe sont des lignes asymptotiques. D'après le théorème 4.4.4, les deux courbes de plis sont rigides.

Autrement dit, lorsque nous choisissons dans  $S$  une carte telle que les courbes coordonnées sont les lignes asymptotiques de  $S$ , le système de flexion dérivé (satisfait par les composantes contravariantes des éléments  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$  de  $\mathbf{R}(S)$ ) devient, d'après la proposition 3.5.8 :

$$(4.5.8) \quad \begin{aligned} w_{2,1}^1 &= -\Gamma_{11}^1 w_2^1 + \Gamma_{22}^1 w_1^2 \\ w_{1,2}^2 &= \Gamma_{11}^2 w_2^1 - \Gamma_{22}^2 w_1^2 \end{aligned}$$

avec :

$$w_1^1 = w_2^2 = 0.$$

Et d'après le théorème 4.4.4, la condition d'angle fixe sur les deux courbes de pli entraîne :

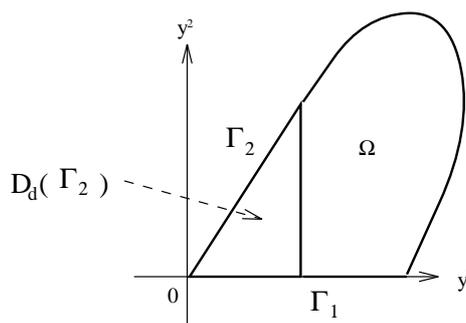
$$(4.5.9) \quad \begin{aligned} w_1^2(y^1, 0) &= 0 \text{ sur le premier pli} \\ w_2^1(0, y^2) &= 0 \text{ sur le second pli.} \end{aligned}$$

Nous voyons que (4.5.9) constitue une donnée de Goursat, nulle, pour le système hyperbolique (4.5.8). Le théorème 1.2.7 montre alors que  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = (0, 0)$  dans le

domaine de détermination défini par la donnée de Goursat, c'est-à-dire que l'on a l'inhibition dans le domaine définie par les deux lignes asymptotiques ; cela correspond à un domaine de  $S$  pourvu qu'il n'y ait pas de ligne asymptotique séparant les deux plis.

**4.5.4. Théorème.** - Soit  $S$  une surface hyperbolique avec deux plis à angle fixe  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  qui forment des angles  $\theta$  et  $\phi$  différents de 0 et de  $\pi$ . On suppose que les courbes de pli  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont des lignes asymptotiques de  $S$ . On suppose de plus qu'elles se coupent en un point  $M$  en formant un angle différent de 0 et qu'il n'y a pas de ligne asymptotique séparant les deux plis sur  $S$ . Alors  $S$  est rigide dans le domaine de détermination défini par les deux lignes asymptotiques.

Généralisons maintenant le théorème 4.5.3. Nous allons voir que dans la configuration du théorème 4.5.4, l'hypothèse que les courbes de plis soient des lignes asymptotiques n'est pas essentielle pour obtenir la rigidification (au moins partielle) de  $S$ .



(Carte où les courbes coordonnées sont les lignes asymptotiques de  $S$ .)

Figure 4.5.4.

**4.5.5. Théorème.** - Dans la même configuration que le théorème 4.5.4 (toujours avec la condition PLASP), mais en supposant que la courbe de pli  $\Gamma_2$  est régulière et transversale aux lignes asymptotiques de  $S$ . Alors  $S$  est rigide dans le domaine de détermination  $D_d(\Gamma_2)$ .

*Preuve du théorème 4.5.5 :* Reprenons sur  $S$ , une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$  telle que les courbes coordonnées sont les lignes asymptotiques de  $S$ . Pour les éléments  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$  de  $\mathbf{R}(S)$  dans cette carte, d'après la proposition 3.5.8, le système de flexion dérivé se réduit à (4.5.8).

Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  les deux courbes de plis sur  $S$  supposons que  $\Gamma_1$  est une ligne asymptotique et  $\Gamma_2$  est transversale aux lignes asymptotiques de  $S$ . Soit  $\varphi_2$  une fonction de classe  $C^1$  décrivant  $\Gamma_2$  :

$$(4.5.10) \quad \Gamma_1 = \{(y^1, y^2) \in \Omega / y^2 = 0\} \text{ et } \Gamma_2 = \{(y^1, y^2) \in \Omega / y^1 = \varphi_2(y^2)\}$$

avec  $\varphi_2(0) = 0$ , de sorte que les courbes de plis se rencontrent au point  $M = \mathbf{r}(0,0)$ .

D'après le théorème 4.4.4, nous avons sur  $\mathbf{w}_1 = 0$  sur  $\Gamma_1$ . Sur le pli  $\Gamma_2$ , la proposition 4.2.3, nous dit que la condition d'angle fixe impose :

$$[\varphi_2' \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2] \wedge [\varphi_2' \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2] = 0 \text{ le long de } \Gamma_2.$$

Autrement dit, les deux plis à angle fixe imposent les conditions :

$$(4.5.11) \quad \begin{aligned} w_1^2(y^1, 0) &= 0 \\ w_2^1(\varphi_2(y^2), y^2) &= [\varphi_2'(y^2)]^2 w_1^2(\varphi_2(y^2), y^2) \end{aligned}$$

Le problème (4.5.8)-(4.5.11) est une variante du problème de Goursat que nous avons énoncé au théorème 1.2.8, dont l'unique solution est alors la solution nulle dans le domaine de détermination issu de  $\Gamma_2$ . ■

Enfin, nous allons voir, que l'hypothèse qu'au moins une des courbes de pli soit un ligne asymptotique n'est pas nécessaire, pourvu qu'il n'y ait pas de ligne asymptotique séparant les plis (PLASP) :

**4.5.6. Théorème.** - *Dans la même configuration que le théorème 4.5.4 (toujours avec la condition PLASP), mais en considérant les deux courbes de plis transversales aux ligne asymptotique de  $S$ . Alors  $S$  est inhibée dans un voisinage du point  $M$ . □*

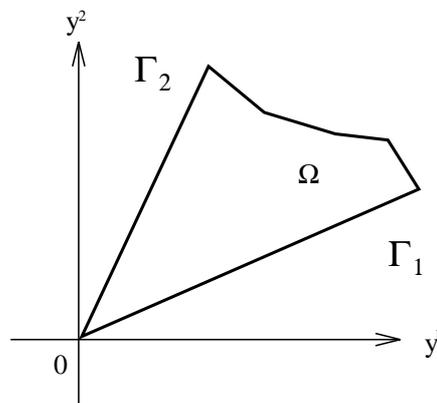


Figure 4.5.5.

*Preuve du théorème 4.5.6.* Reprenons, comme précédemment, sur  $S$  une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$  telle que les courbes coordonnées soient les lignes asymptotiques de  $S$ . Pour les éléments  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$  de  $\mathbf{R}(S)$  dans cette carte, d'après la proposition 3.5.8, le système de flexion dérivé se réduit à (4.5.8).

Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  les deux courbes de pli sur  $S$ . Soit  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  deux fonctions de classe  $C^1$  décrivant  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  :

$$(4.5.12) \quad \Gamma_1 = \{(y^1, y^2) / y^2 = \varphi_1(y^1)\} \text{ et } \Gamma_2 = \{(y^1, y^2) / y^1 = \varphi_2(y^2)\}.$$

Par hypothèse elles sont toutes deux transversales aux lignes asymptotiques de  $S$ , nous supposons donc que les fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont inversibles, et d'inverses régulières ( $C^1$ ).

Les courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  se coupent en un point  $M$ . Nous choisissons  $M = (0,0)$  si bien que nous supposons  $\varphi_1(0) = 0$  et  $\varphi_2(0) = 0$ .

Dans ce cadre, d'après la proposition 4.2.3, les conditions d'angle fixe sur les courbes de pli  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  s'écrivent :

$$(4.5.13) \quad \begin{aligned} w_1^2(y^1, \varphi_1(y^1)) &= [\varphi_1'(y^1)]^2 w_2^1(y^1, \varphi_1(y^1)) && \text{sur } \Gamma_1 \\ w_2^1(\varphi_2(y^2), y^2) &= [\varphi_2'(y^2)]^2 w_1^2(\varphi_2(y^2), y^2) && \text{sur } \Gamma_2. \end{aligned}$$

Il s'agit donc de montrer que le problème (4.5.8)-(4.5.13) n'a que la solution nulle.

Soit  $\Omega_T = [0, T_1] \times [0, T_2]$  un ouvert définissant un voisinage de  $M$ . Nous allons démontrer l'inhibition dans la partie de  $S$  définie dans  $\Omega_T$ , pour  $T_1$  et  $T_2$  suffisamment petits.

Ayant supposé qu'aucune ligne asymptotique issue du point  $M$  n'est dans  $S$  (condition "PLASP"), nous pouvons donc choisir l'orientation des paramètres  $y^1$  et  $y^2$  de sorte que nous ayons :

$$(4.5.14) \quad \begin{aligned} \varphi_1(y^1) &\geq 0 \text{ dans } [0, T_1] \\ \varphi_2(y^2) &\geq 0 \text{ dans } [0, T_2]. \end{aligned}$$

Définissons alors l'opérateur  $A$  (non borné) défini dans :

$$D(A) = \{(u_1, u_2) \in [L^2(\Omega_T)]^2 / u_{1,1} \in L^2(\Omega) \text{ et } u_{2,2} \in L^2(\Omega)\}$$

à valeur dans  $[L^2(\Omega_T)]^2$ , par  $A(u_1, u_2) = (v_1, v_2)$ , avec :

$$(4.5.15) \quad \begin{cases} v_1(y^1, y^2) = \int_{\varphi_2(y^2)}^{y^1} (-\Gamma_{11}^1 u^1 + \Gamma_{22}^1 u^2) d\hat{y}^1 + \varphi_2'^2(y^2) u_2(\varphi_2(y^2), y^2) \\ v_2(y^1, y^2) = \int_{\varphi_1(y^1)}^{y^2} (\Gamma_{11}^2 u^1 - \Gamma_{22}^2 u^2) d\hat{y}^2 + \varphi_1'^2(y^1) v_1(y^1, \varphi_1(y^1)) \end{cases}$$

où les opérateurs intégraux dans (4.5.15) sont définis par continuité comme dans le lemme 1.2.10.

Il est clair qu'une solution du problème (4.5.8)-(4.5.13) est un point fixe de l'opérateur A et réciproquement. Nous allons montrer que le seul point fixe de A est le couple (0,0).

Soit  $(v_1, v_2)$  un point fixe de l'opérateur A. En posant C une constante positive dépendant des coefficients de la surface (toute entière) non nécessairement identique à chaque occurrence<sup>(\*)</sup>, (4.5.15) donne l'inégalité:

$$(4.5.16) \quad \|v_1\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq CT_1 [\|v_1\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|v_2\|_{L^2(\Omega_T)}^2] + T_1 \left[ \int_0^{T_2} |\varphi_2'^2(\hat{y}^2) v_2(\varphi_2(\hat{y}^2), \hat{y}^2)|^2 dy^2 \right],$$

or d'après le lemme 1.2.9. nous avons :

$$\left[ \int_0^{T_2} |\varphi_2'^2(\hat{y}^2) v_2(\varphi_2(\hat{y}^2), \hat{y}^2)|^2 dy^2 \right] \leq |\varphi_2'| \left[ \frac{\|v_2\|_{L^2(\Omega_T)}^2}{T_2} + \|v_{2,2}\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \right],$$

et de plus  $(v_1, v_2)$  étant solution du système (4.5.8), il est facile d'avoir :

$$\|v_{2,2}\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq C [\|v_1\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|v_2\|_{L^2(\Omega_T)}^2],$$

si bien que (4.5.16) devient :

$$\|v_1\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq CT_1 [\|v_1\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|v_2\|_{L^2(\Omega_T)}^2] + |\varphi_2'| \frac{T_1}{T_2} [\|v_2\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + CT_1 [\|v_1\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|v_2\|_{L^2(\Omega_T)}^2]].$$

Par analogie, nous avons :

$$\|v_2\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq CT_2 [\|v_1\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|v_2\|_{L^2(\Omega_T)}^2] + |\varphi_1'| \frac{T_2}{T_1} [\|v_1\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + CT_2 [\|v_1\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|v_2\|_{L^2(\Omega_T)}^2]],$$

---

<sup>(\*)</sup> On peut prendre  $C = \sup_{\Omega} \{\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda\}$

d'où :

$$\|v_2\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq CT_2 \left[ \|v_1\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|v_2\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \right] + |\varphi'_1| |\varphi'_2| \|v_2\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + T_2 C \|v_1\|_{L^2(\Omega_T)}^2,$$

ou encore :

$$(4.5.17) \quad \|v_2\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq 2CT_2 \left[ \|v_1\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|v_2\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \right] + \beta \|v_2\|_{L^2(\Omega_T)}^2,$$

et de nouveau par analogie :

$$(4.5.18) \quad \|v_1\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq 2CT_1 \left[ \|v_1\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|v_2\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \right] + \beta \|v_1\|_{L^2(\Omega_T)}^2,$$

où nous avons posé :

$$\beta = \sup_{y^1 \in [0, T_1]} |\varphi'_1(y^1)| \times \sup_{y^2 \in [0, T_2]} |\varphi'_2(y^2)|.$$

Remarquons que dans les cas où l'une au moins des deux courbes de pli est une ligne asymptotique, nous aurions alors immédiatement  $\beta = 0$ .

Nous supposons désormais que les fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont inversibles au voisinage de 0. Soient  $p_1$  et  $p_2$  les pentes des courbes définies par  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  en 0 dans  $\Omega$  et  $p$  leur produit :

$$\begin{aligned} p_1 &= \varphi'_1(0) \\ p_2 &= \varphi'_2(0) \\ p &= p_1 \cdot p_2 \end{aligned}$$

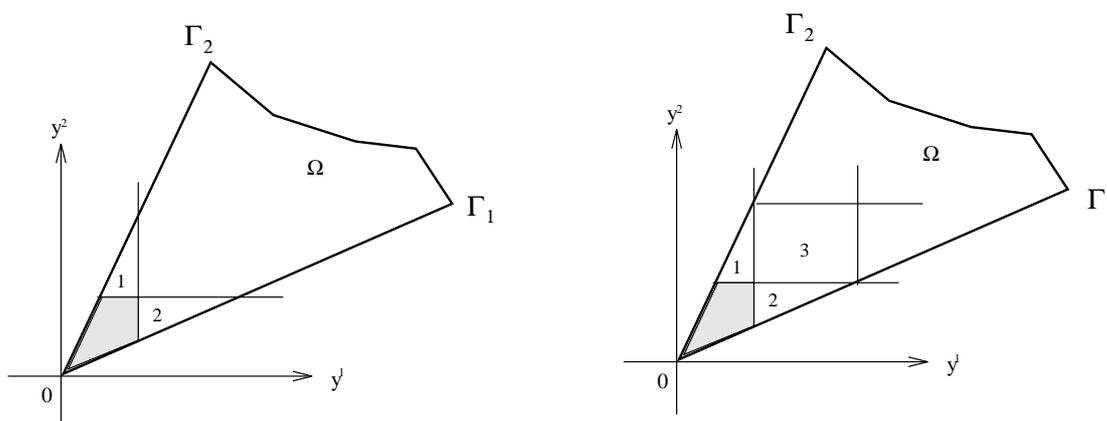
Le coefficient  $p$  est donc différent de 0, mais nous pouvons voir également que  $p$  est différent de 1. En effet, sinon, nous aurions  $p_1 = p_2^{-1}$  ce qui signifierait que les pentes  $p_1$  et  $p_2$  sont parallèles, contraire à l'hypothèse d'angle différent de 0 que forment les courbes de pli  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  au point M.

Ainsi, si les fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  choisies donnent  $p > 1$ , il suffit de choisir des nouvelles fonctions  $\tilde{\varphi}_1$  et  $\tilde{\varphi}_2$  définissant respectivement, au voisinage du point M, les courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , en prenant  $\tilde{\varphi}_1(y^1) = \varphi_2^{-1}(y^1)$  et  $\tilde{\varphi}_2(y^2) = \varphi_1^{-1}(y^2)$ , pour avoir le produit des pentes en 0 correspondantes  $p < 1$ . Si bien qu'en prenant  $T_1$  et  $T_2$  suffisamment petits nous obtenons :

$$\beta = \sup_{y^1 \in [0, T_1]} |\varphi'_1(y^1)| \times \sup_{y^2 \in [0, T_2]} |\varphi'_2(y^2)| < 1.$$

Si bien que les inégalités (4.5.17) et (4.5.18) sont absurdes pour  $T_1$  ou  $T_2$  suffisamment petit, sauf si  $v_1 = v_2 = 0$ . ■

**4.5.7. Remarque.** - Il est clair que dans la configuration du théorème 4.5.6, l'inhibition de  $S$  ne se limite pas à un petit voisinage du point  $M$ . Suivant les cas, l'inhibition se prolonge de proche en proche. De plus, d'après le théorème 4.5.4, il n'est pas nécessaire que les courbes de pli soient totalement transversale aux lignes asymptotiques, pourvu qu'il n'y ait pas de ligne asymptotique dans  $S$  séparant, la courbe de pli et le domaine d'inhibition obtenu.



- A - L'inhibition de la surface dans un voisinage de 0 entraîne l'inhibition de la surface dans les régions 1 et 2 en vertu du théorème 4.5.4.

- B - L'inhibition de la surface dans les régions 1 et 2 entraîne l'inhibition de la surface dans la région 3 (Théorème 1.2.7.). On recommence alors comme en - A -.

Figure 4.5.6

#### 4.6. ANNEXE AU CHAPITRE 4.

**Lemme. 4.4.2.** - Soit une surface  $S$  de classe  $C^2$  et un segment de droite  $\Gamma$  sur  $S$ . Au voisinage de  $\Gamma$ , nous avons l'alternative :

- ou bien, la surface est hyperbolique (dans un voisinage du pli),
- ou bien, les plans tangents coïncident le long de  $\Gamma$ .  $\square$

*Preuve du lemme 4.4.2.* : Choisissons une carte de  $S$  telle que  $\Gamma$  soit une courbe coordonnée à  $y^2$  constant.

Soit  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  la base covariante de la surface,  $\mathbf{a}_1$  est la tangente à  $\Gamma$ , si bien que,  $\Gamma$  étant une droite, nous avons également :

$$\mathbf{a}_{3,1} \text{ est proportionnel à } \mathbf{a}_1 \text{ le long de } \Gamma,$$

d'où :

$$b_{11} = \mathbf{a}_{3,1} \cdot \mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{1,1} = -\mathbf{a}_3 \cdot \rho(y^1) \mathbf{a}_1 = 0 \text{ le long de } \Gamma,$$

et donc :

$$\Delta = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 \leq 0.$$

Ainsi, le long de  $\Gamma$ , puisque la courbure totale  $K$  de la surface est du même signe que  $\Delta$ ,  $K$  est négative ou nulle.

Si  $K = 0$ , c'est-à-dire si  $b_{12} = 0$ , alors nous avons :

$$\mathbf{a}_{3,1} \cdot \mathbf{a}_1 = 0 \text{ et } \mathbf{a}_{3,1} \cdot \mathbf{a}_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_{3,1} = 0.$$

Autrement dit,  $K = 0$  sur  $\Gamma$  si et seulement si les plans tangents à la surface  $S$  coïncident le long de  $\Gamma$ .  $\blacksquare$

**Lemme. 4.4.3** - *Dans la configuration du lemme 4.4.2., si les plans tangents coïncident le long de  $\Gamma$ , la composante normale à  $S$  d'un champ de rotation infinitésimale sur  $S$  est constante sur  $\Gamma$ . Autrement dit, à un champ constant près, un champ de rotation infinitésimale est tangent à  $S$  le long de la courbe de pli  $\Gamma$ .  $\square$*

*Preuve du lemme 4.4.3.* Choisissons une carte de  $S$   $(\Omega, \mathbf{r})$  telle que la base covariante  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  soit orthonormale le long de  $\Gamma$  ; on peut supposer de plus que  $\Gamma$  est décrite par  $\mathbf{r}(y^1, 0)$

Par hypothèse, les plans tangents coïncident le long de  $\Gamma$ , si bien que nous avons :

$$(4.4.12) \quad \left. \begin{array}{l} \mathbf{a}_{1,1} = 0 \\ \mathbf{a}_{2,1} = 0 \text{ et } \mathbf{a}_{3,1} = 0 \\ \Gamma_{12}^\alpha = 0 \text{ et } b_{12} = 0 \\ \Gamma_{11}^\alpha = 0 \text{ et } b_{11} = 0 \end{array} \right\} \text{ le long de } \Gamma,$$

où les coefficients  $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$  sont les symboles de Christoffel et  $b_{\alpha\beta}$  sont les coefficients de la seconde forme fondamentale.

Soient  $\mathbf{u}$  un déplacement inextensionnel sur  $S$ , et  $\omega$  le champ de rotation qui lui est associé; posons  $u_i$  et  $w^j$  respectivement leurs composantes covariantes et contravariantes.

Nous connaissons l'expression des composantes  $w^i$  en fonction des  $u_i$  (cf. proposition 3.4.1, expression (3.4.4)), en particulier pour la composante normale :

$$w^3 = \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{2} (u_{1,2} - u_{2,1}) - \Gamma_{12}^\alpha u_\alpha - b_{12} u_3 \right] \text{ sur } \Omega,$$

où  $a = \|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|$ ;  $a = 1$  sur  $\Gamma$ .

Ce qui se réduit sur  $\Gamma$ , en vertu de (3.2.9) et des simplifications issues de (4.4.12) à :

$$(4.4.13) \quad w^3 = u_{1,2} \text{ sur } \Gamma;$$

il ne nous reste plus alors qu'à montrer que  $u_{1,2}$  est constant le long de  $\Gamma$ .

Sur  $\Omega$ , nous avons, d'après le système de flexion en coordonnées covariantes (3.3.1) :

$$u_{1,1} = \Gamma_{11}^\alpha u_\alpha + b_{11} u_3$$

et, en dérivant par rapport au paramètre  $y^2$ , il vient :

$$u_{1,21} = u_{1,12} = \Gamma_{11,2}^\alpha u_\alpha + \Gamma_{11}^\alpha u_{\alpha,2} + b_{11,2} u_3 + b_{11} u_{3,2}.$$

Nous voyons que  $u_{1,21} \in H^1(\Omega)$ , si bien que sa trace sur  $\Gamma$  a un sens dans  $L^2(\Gamma)$ .

Or,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11,2}^\alpha &= \mathbf{a}^{\alpha,2} \cdot \mathbf{a}_{1,1} + \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}_{1,12} \\ b_{11,2} &= \mathbf{a}_{3,2} \cdot \mathbf{a}_{1,1} + \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{1,12} \end{aligned} \text{ sur } \Omega,$$

et sur  $\Gamma$ , nous avons :

$$\mathbf{a}_{2,1} = 0 \Rightarrow \mathbf{a}_{1,2} = 0 \Rightarrow \mathbf{a}_{1,21} = 0,$$

si bien que  $\Gamma_{11,2}^\alpha = 0$  et  $b_{11,2} = 0$  sur  $\Gamma$ , d'où  $(u_{1,2})_{,1} = u_{1,21} = 0$  sur  $\Gamma$ . ■

## CHAPITRE 5.

### APPLICATION A LA THEORIE DES COQUES ELASTIQUES MINCES.

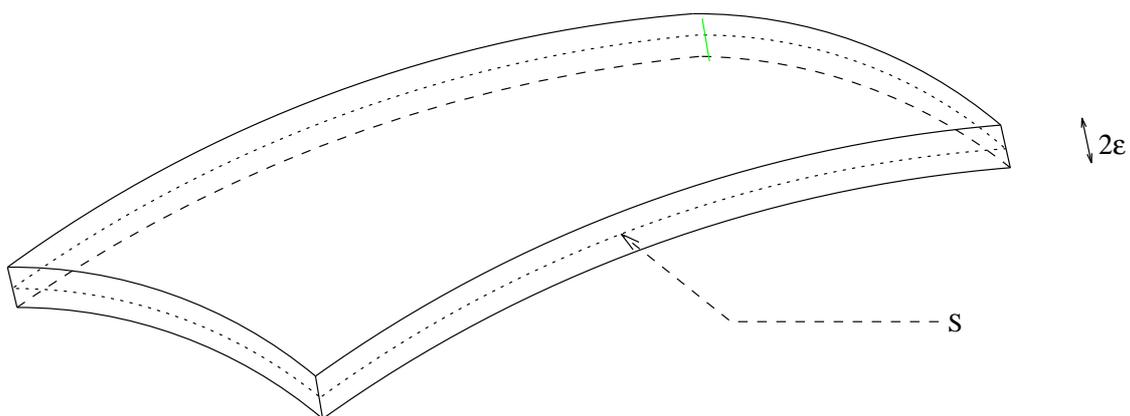
#### 5.1 MODELE BIDIMENSIONNEL LINEARISE DE COQUES DE W. T. KOITER ET SA FORMULATION VARIATIONNELLE.

Nous rappelons brièvement dans cette section des éléments de la théorie linéaire des coques élastiques minces et de leur comportement lorsque leur épaisseur tend vers zéro. Nous choisissons de nous placer, comme dans [Sanchez-Palencia,89], dans le cadre de la théorie linéarisée du modèle bidimensionnel de coques élastiques de W. T. Koiter.

Soit une coque élastique  $S^e$  d'épaisseur  $e > 0$ , elle est définie à partir d'une surface  $S$  donnée par une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$  avec  $\mathbf{r}$  de classe  $C^2$  et où  $\Omega$  est un domaine convexe de  $\mathbf{R}^2$  :

$$S^e = \left\{ \mathbf{p}(y^1, y^2, y^3) = \mathbf{r}(y^1, y^2) + y^3 \mathbf{a}_3, \text{ où } (y^1, y^2, y^3) \in \Omega \times \left[-\frac{e}{2}, +\frac{e}{2}\right] \right\},$$

où  $\mathbf{a}_3$  désigne le vecteur normal unitaire à  $S$ , en chaque point.



Une coque de surface moyenne  $S$ .

Figure 5.1.1.

En appliquant sur la coque  $S^e$  un champ de forces extérieures  $\mathbf{F}$ , le problème mécanique consiste à trouver le champ de déplacement  $\mathbf{u}^e$  de la surface  $S$ . On suppose que les forces extérieures sont suffisamment faibles ou petites, de sorte que la théorie reste dans un cadre linéarisé par rapport au déplacement  $\mathbf{u}^e$ .

Cela revient à *minimiser* l'énergie de déformation dans une classe de fonctions satisfaisant aux conditions aux limites cinématiques (telles la fixation ou l'encastrement d'une partie du bord de la coque) ; s'il n'y a pas de condition aux limites, nous supposons naturellement que le torseur des forces extérieures appliquées à la coque est nul pour que le problème demeure statique. Pour simplifier, nous exposons directement le modèle bidimensionnel de Koiter.

Le modèle de Koiter est un modèle bidimensionnel, c'est à dire qu'un déplacement sur la coque peut être défini à partir d'un déplacement sur la surface moyenne. Cela découle des hypothèses que formule W. T. Koiter, voir [Bernadou et Ciarlet,76] :

- *Les normales à la surface moyenne non-déformée sont encore normales à la surface moyenne après déformation.*
- *Au cours de la déformation, les contraintes sont approximativement planes et parallèles au plan tangent à la surface moyenne.*

Si bien que le problème mécanique tridimensionnel sur la coque se réduit à un problème bidimensionnel sur la surface moyenne.

Ainsi, suivant le modèle de Koiter, le problème mécanique revient à trouver une solution au problème : pour un espace  $\mathbf{V}$  fonctionnel (défini sur  $S$  et à préciser) et pour  $\mathbf{F}$  dans le dual  $\mathbf{V}'$  (l'ensemble des formes linéaires continues sur  $\mathbf{V}$ ) :

$$(5.1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver un déplacement } \mathbf{u}^e \text{ dans } \mathbf{V} \text{ tel que} \\ b^e(\mathbf{u}^e, \mathbf{v}) = (\mathbf{F}, \mathbf{v})_{\mathbf{V}'/\mathbf{V}}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \end{array} \right.$$

qui, de manière classique, est équivalent à un problème de minimisation :

$$(5.1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{u}^e \in \mathbf{V} \text{ qui minimise la fonctionnelle} \\ I_e(\mathbf{v}) = b^e(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - 2(\mathbf{F}, \mathbf{v}) \text{ dans } \mathbf{V}, \end{array} \right.$$

où la *forme bilinéaire symétrique d'énergie de déformation*  $b^e$  sur la surface moyenne se décompose :

$$(5.1.3) \quad b^e(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = ea^m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + e^3 a^f(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

où  $a^m$  et  $a^f$  sont respectivement les formes bilinéaires symétriques d'énergie de déformation membranaire et en flexion, indépendantes de l'épaisseur  $e$ .

En désignant par  $A^{\alpha\beta\lambda\mu}$ , les coefficients d'élasticité de la coque indépendants de  $e$  :

$$(5.1.4) \quad A^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu} a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu} \right]$$

où  $E$  est le module de Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson du matériau (ce sont des coefficients strictement positifs) et où les  $a^{\alpha\beta}$  sont les coefficients contravariants de la première forme fondamentale, cf. (2.1.9).

L'expression de la forme bilinéaire d'énergie de déformation membranaire  $a^m$  est :

$$(5.1.5) \quad a^m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} A^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \gamma_{\lambda\mu}(\mathbf{v}) d\Omega$$

où les  $\gamma_{\alpha\beta}$  sont les composantes (covariantes) du tenseur de déformation de  $S$  :

$$(5.1.6) \quad \gamma(\mathbf{u}) = d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{r},$$

qui expriment les variations de la première forme fondamentale, *i.e.* des longueurs. En composantes covariantes, nous avons (cf. l'expression du système de flexion en coordonnées covariantes (3.2.9)) :

$$(5.1.7) \quad \begin{cases} \gamma_{11}(\mathbf{u}) &= u_{1,1} - \Gamma_{11}^{\lambda} u_{\lambda} - b_{11} u_3 \\ \gamma_{12}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) - \Gamma_{12}^{\lambda} u_{\lambda} - b_{12} u_3 \\ \gamma_{22}(\mathbf{u}) &= u_{2,2} - \Gamma_{22}^{\lambda} u_{\lambda} - b_{22} u_3 \end{cases}$$

où les coefficients  $\Gamma_{\alpha}^{\beta\lambda}$  et  $b_{\alpha\beta}$  sont respectivement les symboles de Christoffel et les coefficients de la seconde forme fondamentale.

La forme bilinéaire d'énergie de déformation en flexion,  $a^f$ , possède une expression analogue à celle de  $a^m$ , mais elle fait intervenir les variations  $\rho_{\alpha\beta}$  de la seconde forme fondamentale, *i.e.* les variations de courbure :

$$(5.1.8) \quad a^f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{12} \int_{\Omega} A^{\alpha\beta\lambda\mu} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \rho_{\lambda\mu}(\mathbf{v}) d\Omega$$

avec (voir par exemple [Bernadou et Ciarlet, 76]) :

$$(5.1.20) \quad \begin{cases} \rho_{11}(\mathbf{u}) &= u_{3,11} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} u_{\lambda} + 2b_1^{\lambda} (u_{\lambda,1} - \Gamma_{\lambda 1}^{\mu} u_{\mu}) + (b_{1,1}^{\lambda} + \Gamma_{1\mu}^{\lambda} b_1^{\mu} - \Gamma_{11}^{\mu} b_{\mu}^{\lambda}) u_{\lambda} - b_1^{\lambda} b_{\lambda 1} u_3 \\ \rho_{12}(\mathbf{u}) &= u_{3,11} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} u_{\lambda} + b_1^{\lambda} (u_{\lambda,2} - \Gamma_{\lambda 2}^{\mu} u_{\mu}) + b_2^{\lambda} (u_{\lambda,1} - \Gamma_{\lambda 1}^{\mu} u_{\mu}) + (b_{1,2}^{\lambda} + \Gamma_{1\mu}^{\lambda} b_2^{\mu} - \Gamma_{12}^{\mu} b_{\mu}^{\lambda}) u_{\lambda} - b_1^{\lambda} b_{\lambda 2} u_3 \\ \rho_{22}(\mathbf{u}) &= u_{3,22} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} u_{\lambda} + 2b_2^{\lambda} (u_{\lambda,2} - \Gamma_{\lambda 2}^{\mu} u_{\mu}) + (b_{2,2}^{\lambda} + \Gamma_{2\mu}^{\lambda} b_2^{\mu} - \Gamma_{22}^{\mu} b_{\mu}^{\lambda}) u_{\lambda} - b_2^{\lambda} b_{\lambda 2} u_3 \end{cases}$$

**5.1.1 Remarque** - On observe que la forme bilinéaire d'énergie de déformation en membrane  $a^m$  fait intervenir les *dérivées partielles premières des composantes tangentielles* d'un déplacement, mais pas les dérivées de la composante normale, et pas de dérivées d'ordre supérieur. Tandis que la forme bilinéaire d'énergie de déformation en flexion  $a^f$  fait intervenir les *dérivées partielles premières des composantes tangentielles* et les *dérivées partielles secondes de la composante normale* du déplacement.  $\square$

**5.1.2. Remarque.** - La positivité des coefficients  $A^{\alpha\beta\lambda\mu}$  permet de montrer (voir par exemple [Ciarlet, Bernadou et Miara,94]) qu'il existe des constantes  $c > 0$  et  $C > 0$  telles que :

$$(5.1.11) \quad \begin{cases} c \|\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)} \leq a^m(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq C \|\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)} \\ c \|\boldsymbol{\rho}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)} \leq a^f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq C \|\boldsymbol{\rho}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)} \end{cases} . \square$$

**5.1.3. Remarque.** - Pour chaque épaisseur  $e > 0$  fixée, le noyau  $N(b)$  de la forme quadratique associée à la forme bilinéaire d'énergie de déformation  $b^e$  est l'ensemble des déplacements laissant invariants les première et seconde formes fondamentales de  $S$  au sens linéarisé, c'est-à-dire les déplacements rigides infinitésimaux sur  $S$  (voir la définition 3.1.3) ; c'est le lemme du mouvement rigide de [Bernadou et Ciarlet,76].  $\square$

L'espace approprié pour l'étude du problème (5.1.1), à  $e > 0$  fixée, est l'espace de Hilbert, produit d'espaces de Sobolev classiques munis de leur normes usuelles:

$$\mathbf{V} = \{ \mathbf{u} = (u_i) / u_{\alpha} \in H^1(\Omega) \text{ et } u_3 \in H^2(\Omega) + \text{conditions aux limites} \}$$

dans lequel [Bernadou et Ciarlet,75] ont démontré l'ellipticité du modèle de coque de Koiter, voir également [Bernadou, Ciarlet et Miara,94]. Plus précisément :

**5.1.4. Théorème.** - Soit  $S = (\Omega, \mathbf{r})$  une surface de classe  $C^3$  encastrée sur une partie de son bord (de mesure  $> 0$ ), alors il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  :

$$(5.1.12) \quad a^m(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + a^f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c \|\mathbf{u}\|_{H^1 \times H^1 \times H^2}^2 .$$

Autrement dit, pour toute épaisseur  $e > 0$  fixée, on a :

$$(5.1.12b) \quad ea^m(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + e^3 a^f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c_e \|\mathbf{u}\|_{H^1 \times H^1 \times H^2}^2,$$

où la constante  $c_e$  dépend de l'épaisseur  $e$ . Le théorème 5.1.4 montre qu'il existe une unique solution au problème (5.1.1) pour chaque épaisseur  $e$  fixée en vertu du théorème de Lax-Milgram<sup>(\*)</sup>.

Remarquons que  $\mathbf{V}$ , s'injecte de façon dense et continue (et même compacte, voir par exemple [Brezis,83]) dans l'espace de Hilbert :

$$\mathbf{H} = \{\mathbf{u} = u_i \mathbf{a}^i \text{ tels que les } u_i \text{ soient dans } L^2(\Omega)\},$$

muni de la norme  $L^2$  usuelle. Dans la suite, de manière classique, nous identifierons  $\mathbf{H}$  avec son dual de sorte qu'on ait les injections continues

$$\mathbf{V} \subset \mathbf{H} = \mathbf{H}' \subset \mathbf{V}'.$$

Ainsi dans le problème (5.1.1), le produit de dualité  $(\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\mathbf{V}'/\mathbf{V}}$  sera remplacé par le produit scalaire dans  $\mathbf{H}$  :  $(\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}}$ , si on prend  $\mathbf{f}$  dans  $\mathbf{H}$ .

**5.1.5. Remarque.** - S'il n'y a pas de condition aux limites sur  $S$ , ou si  $\mathbf{V}$  contient des déplacements rigides non-nuls, le théorème 5.1.4 reste vrai dans l'espace quotient  $\mathbf{V} / \{\text{déplacements rigides}\}$  muni de la norme quotient, *i.e.* il existe  $c > 0$  telle que pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ , on a :

$$a^m(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + a^f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c \inf_{\mathbf{v} \in N(b)} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{H^1 \times H^1 \times H^2}^2 \quad \square$$

**5.1.7. Remarque.** - Dans le théorème 5.1.4, l'hypothèse de régularité  $C^3$  de la surface peut être levée, la régularité  $C^2$  étant suffisante, voir [Blouza et Le Dret,94].  $\square$

Dans [Sanchez-Palencia,89], dont nous reprenons les terminologies de coques inhibées, bien-inhibées, E. Sanchez-Palencia a étudié le comportement asymptotique lorsque l'épaisseur tend vers zéro. Il mis en évidence deux comportements très différents suivant que la coque est inhibée ou non, autrement dit si la surface moyenne de la coque est géométriquement rigide ou non, voir également [Sanchez-Palencia,92]. Naturellement il n'est pas raisonnable d'étudier le comportement limite avec des forces

---

<sup>(\*)</sup> Théorème de Lax-Milgram : Soit  $V$  un espace de Hilbert et  $b$  une forme bilinéaire coercive sur  $V$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout  $v$  de  $V$ , on ait :  $b(v, v) \geq c \|v\|_V^2$ . Alors, quelle que soit  $f$  de  $V'$ , il existe un unique  $u$  de  $V$  telle que :  $b(v, v) = (f, v)_V$  (voir [Brezis,83]).

extérieures indépendantes de  $e$ , car plus  $e$  serait petit, plus le déplacement serait grand. Nous voyons que vraisemblablement, pour obtenir des déplacements de l'ordre de  $\delta \ll 1$ , il faudra se donner des forces de l'ordre de  $\delta e$ , mais nous verrons, dans les sections suivantes, que ce n'est pas toujours le cas.

## 5.2. CAS DES COQUES A FLEXION PURE NON-INHIBEE.

Nous nous replaçons dans le cadre de la section précédente avec une coque  $S^e$  de surface moyenne  $S$  donnée par une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$ .

Nous supposons dans cette section, que l'espace des déplacements inextensionnels :

$$\mathbf{G} = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{V} / \gamma(\mathbf{u}) = d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = 0 \}$$

n'est pas contenu dans l'espace des déplacements rigides ; nous écrirons également (de façon abusive) :  $\mathbf{G} \neq \{0\}$ .

Etant donné une force (très petite) de la forme :

$$(5.2.1) \quad \mathbf{F} = \delta e^3 \mathbf{f} \text{ avec } \mathbf{f} \text{ indépendant de } e,$$

Réécrivons la formulation variationnelle (5.1.1) du problème mécanique d'une coque.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \tilde{\mathbf{u}}^e \text{ dans } \mathbf{V} \text{ telle que} \\ e a^m(\tilde{\mathbf{u}}^e, \mathbf{v}) + e^3 a^f(\tilde{\mathbf{u}}^e, \mathbf{v}) = (\mathbf{F}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \end{array} \right.$$

En faisant le changement d'inconnue (mise à l'échelle), :

$$(5.2.2) \quad \tilde{\mathbf{u}} = \delta \mathbf{u}$$

(où  $\mathbf{u}$  désigne la nouvelle inconnue) et en divisant par  $\delta e^3$  et en posant :

$$(5.2.3) \quad \varepsilon = e^2,$$

le problème (5.1.1) devient :

$$(5.2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver un déplacement } \mathbf{u}^\varepsilon \in \mathbf{V} \text{ tel que :} \\ \varepsilon^{-1} a^m(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + a^f(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \end{array} \right.$$

On voit que pour  $e$  (ou  $\varepsilon$ ) petit les "déformations en membrane" sont pénalisées par rapport aux "déformations en flexion", ce qui est intuitivement cohérent (nous pouvons

penser à une feuille de papier, il est "assez difficile" de l'étirer). Si bien que le déplacement aura tendance à aller au "gouffre" de minimisation (nous reprenons la terminologie de [Sanchez-Palencia,89]) défini par :

$$(5.2.5) \quad \mathbf{G} = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{V} / a^m(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \},$$

c'est-à-dire, d'après la remarque 5.1.2, l'espace des déplacements inextensionnels. C'est un espace fermé dans  $\mathbf{V}$  et donc également un espace de Hilbert pour la norme de  $\mathbf{V}$ .

Le "comportement limite" est le suivant :

**5.2.1. Théorème.** - Soit  $\mathbf{u}^\varepsilon$  la solution de (5.2.4). Alors, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$(5.2.6) \quad \mathbf{u}^\varepsilon \longrightarrow \mathbf{u}^0 \text{ dans } \mathbf{V} \text{ faible}^{(*)}$$

où  $\mathbf{u}^0$  est la solution du problème :

$$(5.2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver un déplacement } \mathbf{u}^0 \in \mathbf{G} \text{ tel que :} \\ a^f(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{G}. \end{array} \right.$$

*Preuve :* Remarquons tout d'abord que le problème (5.2.7) possède une solution unique. En effet la forme bilinéaire  $b^\varepsilon$  étant coercive et continue sur  $\mathbf{V}$ , la forme  $a^f$  est coercive et continue sur  $\mathbf{G}$ , on peut alors appliquer le théorème de Lax-Milgram.

Prenons  $\mathbf{v} = \mathbf{u}^\varepsilon$  dans (5.2.4), avec (5.1.12) (coercivité de la forme bilinéaire  $b^\varepsilon$ ), nous avons pour tout  $\varepsilon$  suffisamment petit :

$$c \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}}^2 \leq a^m(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) + a^f(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) \leq \varepsilon^{-1} a^m(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) + a^f(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) = (\mathbf{f}, \mathbf{u}^\varepsilon) \leq C \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}},$$

d'où :

$$(5.2.8) \quad \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}} \leq c,$$

avec une constante  $c > 0$  indépendante de  $\varepsilon$  (assez petit). Les solutions  $\mathbf{u}^\varepsilon$  de (5.2.4) forment donc une famille bornée dans  $\mathbf{V}$ , ce qui entraîne d'autre part, que pour tout  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon^{-1} a^m(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) + a^f(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) \text{ est bornée}$$

d'où :

---

(\*) La topologie faible sur  $\mathbf{V}$  est, par définition, la topologie la plus fine rendant continues les formes linéaires sur  $\mathbf{V}$ .

$$(5.2.9) \quad a^m(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

D'autre part  $\mathbf{V}$  est un espace réflexif<sup>(\*)</sup>, si bien que d'après (5.2.8), cette famille est faiblement compacte<sup>(\*\*)</sup> dans  $\mathbf{V}$  et on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement vers une fonction  $\mathbf{u}^0$  dans  $\mathbf{V}$ . (5.2.9) indique alors que  $\mathbf{u}^0$  appartient à  $\mathbf{G}$ . En prenant alors  $\mathbf{v}$  dans  $\mathbf{G}$ , (5.2.4) devient :

$$(5.2.10) \quad a^f(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}}.$$

En passant à la limite dans (5.2.10), nous voyons que  $\mathbf{u}^0$  satisfait au problème (5.2.7). ■

**5.2.2. Remarque.** - Il a été montré de plus dans [Ciarlet, Lods et Miara,94] que la convergence dans (5.2.6) est forte au sens des normes  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ .

**5.2.3. Remarque.** - "Qui peut le plus, ne peut pas forcément le moins!", E. Sanchez-Palencia. Le problème (5.2.7) étant défini dans le sous-espace des déplacements inextensionnels  $\mathbf{G}$ , une étude numérique par éléments finis discrétisant l'espace  $\mathbf{V}$  peut - a de grande chance - d'être inadéquate. En effet, il est fort "probable" - en tout cas rien n'indique le contraire - que l'espace discrétisé, de dimension finie, n'a de point commun avec  $\mathbf{G}$  que le déplacement nul. Une étude numérique donne alors, dans le cas d'une coque en flexion, la meilleur approximation d'un élément de  $\mathbf{G}$ , c'est à dire 0! Si bien que des flexions (qui sont des déplacements "grands"<sup>(\*\*\*)</sup>) d'une surface non-inhibée peuvent passer inaperçues par le calcul. Ce genre de phénomène est connu comme "blocage" ou "verrouillage" numérique (voir [Sanchez-Palencia,95]). □

Ainsi, d'après la remarque 5.2.3, une étude numérique par éléments finis des coques en flexion appelle une discrétisation de l'espace  $\mathbf{G}$ , ce qui, apparemment, est loin d'être évident. Il nous semble - du moins dans certains cas simples - que l'espace  $\mathbf{R}(S)$  associé à la surface moyenne  $S$  (définie par une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$ ), puisse donner une voie à cette dicrétisation.

Dans  $\mathbf{G}$ , l'expression de la variation  $\rho$  de la seconde forme fondamentale se simplifie et on peut l'exprimer en fonction des composantes contravariantes des

(\*) C'est à dire que l'injection canonique de  $\mathbf{V}$  dans son bidual topologique  $\mathbf{V}''$  est bijective.  $\mathbf{V}$  est un espace de Hilbert donc réflexif (voir par exemple [Brézis,83]).

(\*\*) La boule unité (les ensembles bornés) d'un espace réflexif est faiblement compacte, c'est à dire compacte pour la topologie faible, voir également [Brézis].

(\*\*\*) "Grands" au sens où une flexion nécessite une énergie de déformation plus faible (lorsque l'épaisseur tend vers 0) qu'un "étirement membranaire".

éléments de  $\mathbf{R}(S)$  : soient  $\mathbf{u} \in \mathbf{G}$  et  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \mathbf{R}(\mathbf{u}) \in \mathbf{R}(S)$  (où  $\mathbf{R}$  est l'isomorphisme de  $\mathbf{G}$  dans  $\mathbf{R}(S)$  défini en (3.5.6)), et soit  $\omega$  le champ de rotation infinitésimal associé à  $\mathbf{u}$ , nous avons :

$$\rho(\mathbf{u}) = d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{a}_3 + d\mathbf{r} \cdot d(\omega \wedge \mathbf{a}_3).$$

Or, par définition nous avons :  $d\mathbf{u} = \omega \wedge d\mathbf{r}$ , d'où :

$$(5.2.11) \quad \rho(\mathbf{u}) = (d\omega \wedge \mathbf{a}_3) \cdot d\mathbf{r}.$$

Autrement dit, en coordonnées covariantes :

$$(5.2.12) \quad \begin{cases} \rho_{11}(\mathbf{u}) = [w_1^1 \mathbf{a}_1 + w_1^2 \mathbf{a}_2] \wedge \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1 = w_1^2 \\ \rho_{12}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\omega_{,1} \wedge \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_2 + \omega_{,2} \wedge \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1) = \frac{1}{2} (w_1^1 + w_2^2) = 0 \\ \rho_{22}(\mathbf{u}) = [w_2^1 \mathbf{a}_1 + w_2^2 \mathbf{a}_2] \wedge \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_2 = w_2^1. \end{cases}$$

Or la forme bilinéaire d'énergie de flexion  $a^f$  est exprimée par :

$$a^f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\lambda\mu} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \rho_{\lambda\mu}(\mathbf{v}) d\Omega,$$

qui devient, d'après (5.2.8), en posant  $\mathbf{R}(\mathbf{u}) = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$  et  $\mathbf{R}(\mathbf{v}) = (\tilde{\mathbf{w}}_1, \tilde{\mathbf{w}}_2)$  :

$$(5.2.13) \quad a^f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} a^{\alpha\alpha\lambda\lambda} c_{\alpha\alpha}(\mathbf{u}) c_{\lambda\lambda}(\mathbf{v}) d\Omega,$$

où nous avons posé :

$$(5.2.14) \quad c_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} w_1^2 & 0 \\ 0 & w_2^1 \end{pmatrix}.$$

La forme (5.2.13) étant relativement simple, le problème (5.2.7) devrait admettre certaines simplifications. Par exemple, considérons une surface hyperbolique réglée fixée le long d'une génératrice  $\sigma$ , définie par une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$  du type (2.5.1) :

$$\mathbf{r}(y^1, y^2) = \mathbf{c}(y^1) + y^2 \mathbf{g}(y^1).$$

Prenons par exemple, et pour fixer les idées, la surface  $S$  de sorte que tout les points de  $S$  soient reliés à  $\sigma$  par une ligne asymptotique. Nous connaissons alors, d'après la proposition 4.1.7, la forme générale des éléments de  $\mathbf{R}(S)$  :

$$(5.2.15) \quad \begin{cases} w_1^1 = w_2^2 = w_2^1 = 0 \\ w_1^2 = \varphi(y^1), \end{cases}$$

où  $\varphi$  est une fonction de  $L^2(\sigma)$ .

Si bien que la forme bilinéaire d'énergie de déformation se réduit dans ce cas à :

$$(5.2.16) \quad a^f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} a^{1111} \varphi(y^1) \tilde{\varphi}(y^1) d\Omega.$$

### 5.3. CAS DES COQUES A FLEXION PURES INHIBÉES. UN EXEMPLE DE SENSITIVITE.

Nous nous plaçons de nouveau dans le cadre de la section 1 de ce chapitre avec une coque  $S^e$  de surface moyenne  $S$  donnée par une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$ . Mais, nous supposons dans cette section, que l'espace des déplacements inextensionnels,

$$\mathbf{G} = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{V} / \gamma(\mathbf{u}) = d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = 0 \},$$

est *contenu* dans l'espace des déplacements rigides ; c'est-à-dire que nous supposons que la surface  $S$  est inhibée. Nous considérerons pour simplifier, le cas usuel où les déplacements rigides de  $\mathbf{V}$  sont nuls :  $\mathbf{G} = \{0\}$  ; si ce n'est pas le cas, on quotiente l'espace  $\mathbf{G}$  par le sous-espace des déplacements rigides.

Remarquons que le théorème 5.2.1 reste alors valable mais n'est pas intéressant puisqu'il indique que les solutions des problèmes (5.2.4) (c'est à dire le problème (5.1.1) avec la mise à l'échelle (5.2.2)) tendent faiblement vers zéro lorsque l'épaisseur  $e$  tend vers zéro.

Etant donné une force (petite) de la forme :

$$(5.3.1) \quad \mathbf{F} = \delta e \mathbf{f}, \text{ avec } \mathbf{f} \text{ indépendant de } e,$$

réécrivons la formulation variationnelle (5.1.1) du problème mécanique d'une coque :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \tilde{\mathbf{u}}^e \text{ dans } \mathbf{V} \text{ telle que} \\ e a^m(\tilde{\mathbf{u}}^e, \mathbf{v}) + e^3 a^f(\tilde{\mathbf{u}}^e, \mathbf{v}) = (\mathbf{F}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \end{array} \right.$$

En faisant le changement d'inconnue (mise à l'échelle), où  $\mathbf{u}$  désigne la nouvelle inconnue :

$$(5.3.2) \quad \tilde{\mathbf{u}} = \delta \mathbf{u},$$

en divisant par  $\delta e$  et en posant :

$$(5.3.3) \quad \varepsilon = e^2,$$

le problème (5.1.1) devient :

$$(5.3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{u}^\varepsilon \in \mathbf{V} \text{ telle que} \\ a^m(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + \varepsilon a^f(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \end{array} \right.$$

Nous observons que le terme d'énergie de flexion disparaît lorsque  $\varepsilon$  (ou l'épaisseur  $e$ ) tend vers zéro. Or, nous avons vu (remarque 5.1.1) que seule la forme  $a^f$  contient des termes de dérivées d'ordre supérieur à 1 (dérivées d'ordre 2), si bien que le problème (5.3.4) apparaît comme un problème de perturbation singulière. En conséquence, le problème limite ne s'écrit pas dans le même espace.

D'autre part, d'après le théorème 5.1.4 (ellipticité du modèle de Koiter), la forme  $a^m + a^f$  est coercive dans  $\mathbf{V}$ , si bien que puisque la forme  $a^f$  définit une norme sur  $\mathbf{V}$  ( $\mathbf{G} = \{0\}$ ), alors la forme  $a^m$  définit également une norme sur  $\mathbf{V}$ .

On construit alors, de manière classique, l'espace complété :

$$(5.3.5) \quad \mathbf{V}^a = \text{Complété de } \mathbf{V} \text{ pour la norme } a^m(\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2}.$$

$\mathbf{V}^a$  est donc un espace de Hilbert, par construction. On a alors le résultat classique suivant (voir [Sanchez-Palencia, 89 II et 92]) :

**5.3.1. Théorème.** - *Supposons que  $\mathbf{f}$  est une forme linéaire continue sur  $\mathbf{V}^a$ , soit  $\mathbf{u}^\varepsilon$  la solution du problème (5.3.1), alors lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0,*

$$(5.3.6) \quad \mathbf{u}^\varepsilon \longrightarrow \mathbf{u}^0 \text{ dans } \mathbf{V}^a \text{ fort,}$$

où  $\mathbf{u}^0$  est la solution du problème :

$$(5.3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{u}^0 \in \mathbf{V}^a \text{ telle que} \\ a^m(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\mathbf{V}^a/\mathbf{V}^a} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}^a. \end{array} \right.$$

*Preuve :* Remarquons tout d'abord que le problème (5.3.7) possède une solution unique. En effet, la forme  $a^m$  étant, par définition, coercive et continue sur  $\mathbf{V}^a$ , on applique le théorème de Lax-Milgram.

Prenons  $\mathbf{v} = \mathbf{u}^\varepsilon$  dans (5.3.4), nous avons alors, puisque  $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^{\text{at}}$  :

$$(5.3.8) \quad a^m(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) \leq a^m(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) + \varepsilon a^f(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) = (\mathbf{f}, \mathbf{u}^\varepsilon)_{\mathbf{V}^{\text{at}}/\mathbf{V}^{\text{a}}} \leq C \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}^{\text{a}}},$$

d'où :

$$(5.3.9) \quad \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}^{\text{a}}} \leq C.$$

Si bien qu'il existe une sous-suite (en fait la suite entière) qui converge faiblement dans  $\mathbf{V}^{\text{a}}$  vers une fonction de  $\mathbf{V}^{\text{a}}$ , que nous notons  $\mathbf{u}^*$ .

Pour tout  $\mathbf{v}$  fixé dans  $\mathbf{V}$ , par Cauchy-Schwartz, nous avons :

$$(5.3.10) \quad |\varepsilon a^f(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v})| \leq \varepsilon a^f(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon)^{1/2} a^f(\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2},$$

mais dans (5.3.8) nous avons en particulier :

$$\varepsilon a^f(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) \leq c \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}^{\text{a}}},$$

si bien que (5.3.10) donne, puisque que la suite des  $\mathbf{u}^\varepsilon$  est bornée dans  $\mathbf{V}^{\text{a}}$  :

$$(5.3.11) \quad |\varepsilon a^f(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v})| \leq \varepsilon^{1/2} (\varepsilon^{1/2} a^f(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon)^{1/2}) a^f(\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2} \leq \varepsilon^{1/2} C.$$

Ainsi, pour tout  $\mathbf{v}$  fixé dans  $\mathbf{V}$ , nous avons :

$$(\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\mathbf{V}^{\text{at}}/\mathbf{V}^{\text{a}}} = a^m(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + \varepsilon a^f(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a^m(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}),$$

autrement dit :  $\mathbf{u}^*$  est la solution du problème (5.3.7),  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^0$ .

Nous avons montré que  $\mathbf{u}^\varepsilon$  tend faiblement vers  $\mathbf{u}^0$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. Il reste à montrer que la convergence est forte. Nous avons :

$$a^m(\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^\varepsilon) + \varepsilon a^f(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) = (\mathbf{f}, \mathbf{u}^0)_{\mathbf{V}^{\text{at}}/\mathbf{V}^{\text{a}}} - 2(\mathbf{f}, \mathbf{u}^\varepsilon)_{\mathbf{V}^{\text{at}}/\mathbf{V}^{\text{a}}} + (\mathbf{f}, \mathbf{u}^\varepsilon)_{\mathbf{V}^{\text{at}}/\mathbf{V}^{\text{a}}},$$

d'où, nous obtenons l'estimation :

$$(5.3.12) \quad a^m(\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^\varepsilon) \leq (\mathbf{f}, \mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^\varepsilon)_{\mathbf{V}^{\text{at}}/\mathbf{V}^{\text{a}}}.$$

Si bien que la convergence faible dans  $\mathbf{V}^{\text{a}}$  de  $\mathbf{u}^\varepsilon$  vers  $\mathbf{u}^0$  entraîne, d'après (5.3.12), la convergence forte dans  $\mathbf{V}^{\text{a}}$ . ■

**5.3.2. Remarque.** - Le théorème 5.3.1 peut n'être pas très satisfaisant car l'espace  $\mathbf{V}^{\text{a}}$  peut être très "grand" (peut ne pas être contenue dans l'espace des distributions), et donc

son dual  $\mathbf{V}^a$  peut être "très petit", autrement dit : supposer que  $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^a$ , peut être une hypothèse très restrictive.  $\square$

En fait, le théorème 5.3.1 peut être précisé lorsque la coque est bien-inhibée, c'est le cas dit des *coques membranaires*, tandis que lorsque la coque est mal-inhibée, cela peut aboutir à un problème dit *sensitif*.

Avant de préciser cela, il est utile de remarquer, d'après la remarque 5.1.2, que

$$(5.3.13) \quad a^m(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq C \|\gamma(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left[ \|u_1\|_{H^1}^2 + \|u_2\|_{H^1}^2 + \|u_3\|_{L^2}^2 \right],$$

si bien que nous avons :

$$(5.3.14) \quad \mathbf{V}_m \subset \mathbf{V}^a,$$

où nous avons défini :

$$(5.3.15) \quad \mathbf{V}_m = \text{Espace complété de } \mathbf{V} \text{ pour la norme } H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

#### CAS D'UNE COQUE BIEN-INHIBÉE OU COQUE MEMBRANAIRE.

Nous rappelons qu'une surface est dite bien inhibée si le tenseur de déformation linéarisé satisfait à (définition 3.1.6) :

$$(5.3.16) \quad \|\gamma(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)} \geq c \|\mathbf{u}\|_{L^2} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}.$$

Nous avons alors le théorème suivant (voir [Ciarlet et Sanchez-Palencia,95]):

**5.3.3. Théorème.** - Si  $S$  est bien-inhibée, alors il existe  $C > 0$  telle qu'on ait :

$$(5.3.17) \quad a^m(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq C \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \text{ pour tout } \mathbf{v} \text{ dans } \mathbf{V}_m.$$

Si bien que lorsque la surface est bien-inhibée, nous avons :  $\mathbf{V}^a = \mathbf{V}_m$ .

*Preuve* : Donnons tout d'abord une définition de surface bien inhibée équivalente à la définition 3.1.6. D'après (5.1.7), nous avons l'expression en coordonnées covariantes du tenseur de déformation linéarisé :

$$(5.3.18) \quad \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda u_\lambda - b_{\alpha\beta} u_3,$$

si bien que, avec une constante positive  $C$  qui ne sera pas nécessairement identique à chaque occurrence, nous avons :

$$(5.3.19) \quad \|\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \left\| \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Et avec l'inégalité de Korn (voir par exemple [Duvaut et Lions,72]) :

$$(5.3.20) \quad \sum_{\alpha\beta} \left\| \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq C \left[ \|u_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_2\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_3\|_{L^2(\Omega)}^2 \right],$$

(5.3.19) entraîne :

$$(5.3.21) \quad \|\gamma(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq C \left[ \|u_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_2\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_3\|_{L^2(\Omega)}^2 \right].$$

Or, par définition, lorsque la surface est bien inhibée, nous avons :

$$(5.3.22) \quad \|\gamma(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

si bien que, d'après (5.3.21), nous obtenons :

$$(5.3.23) \quad \|\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq C \left[ \|u_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_2\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_3\|_{L^2(\Omega)}^2 \right].$$

Par densité, l'inégalité (5.3.23) d'étend à tout élément de  $\mathbf{V}_m$ . Mais alors, nous avons, d'après la remarque 5.1.2, pour tout élément de  $\mathbf{V}_m$  :

$$(5.3.24) \quad a^m(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq C\|\gamma(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq C\|\mathbf{v}\|_{H^1 \times H^1 \times L^2(\Omega)}^2.$$

CQFD. ■

Le théorème 5.3.3 indique donc, en appliquant le théorème de Lax-Milgram, que le problème limite est bien posé dans  $\mathbf{V}_m$  lorsque la surface est bien inhibée.

**5.3.4. Remarque.** - L'hypothèse de "bonne-inhibition" est très forte. En effet, les cas d'une surface uniformément elliptique, fixée ou encastrée sur tout son bord sont, en fait, avec les ovoïdes, les seuls exemples que nous connaissons. Nous avons vu (chapitre 3, section 7) que les surfaces développables ou hyperboliques admettent des pseudo-flexions si bien qu'elles ne peuvent pas être bien-inhibées. Les surfaces bien-inhibées sont donc forcément de type elliptique. Mais encore, les surfaces elliptiques avec une partie du bord libre ou avec un pli sont mal-inhibées (voir [Geymonat et Sanchez-Palencia,95], théorème 6.1). □

## CAS D'UNE COQUE MAL-INHIBÉE. UN RESULTAT DE SENSITIVITÉ.

Dans le cas d'une coque mal-inhibée (c'est-à-dire qu'il existe une suite de pseudo-flexions admissibles sur la surface) le théorème 5.3.3 n'est plus valable et il se peut que l'espace complété  $\mathbf{V}^a$  n'appartiennent pas à l'espace des distributions.

J. L. Lions et E. Sanchez-Palencia ont montré, qu'il existe (de manière explicite) des solutions au problème limite (5.3.7) qui ne sont pas des distributions, dans le cas d'une surface uniformément elliptique fixée ou encastrée sur une partie  $\Gamma_0$  de son bord, et telle qu'une autre partie du bord  $\Gamma_1$  de mesure non-nulle est libre - c'est à dire qu'aucun déplacement n'est imposé sur  $\Gamma_1$  ; voir [Lions et Sanchez-Palencia,95] théorème 4.2.

Par dualité « il existe alors des fonctions  $C^\infty$ , à support compact dans  $\Omega$  ( $D(\Omega)$ ) qui ne seront pas contenu dans l'espace dual  $\mathbf{V}^a$ . Ce qui veut dire qu'il y a des données  $\mathbf{f}$  dans  $D(\Omega)$ , (aussi petites que l'on veut, ainsi que chacune de leur dérivées) pour lesquelles il n'existe pas de solution dans  $\mathbf{V}^a$ ».

Il s'agit là d'un résultat d'instabilité. Si on suppose qu'il existe une solution  $\mathbf{u}$  dans  $\mathbf{V}^a$  au problème limite (3.5.7) avec une donnée  $\mathbf{f}$ , il se peut que le même problème avec pour donnée  $\mathbf{f} + \delta\mathbf{f}$  (où la fonction  $\delta\mathbf{f}$  est dans  $D(\Omega)$ , aussi petite que l'on veut, ainsi que chacune de ses dérivées), n'ait pas de solution dans  $\mathbf{V}^a$ . Cela traduit, a priori, une impossibilité pratique d'avoir une étude numérique correcte et fiable, puisqu'une telle étude est par nature soumise à des approximations des données. C'est le phénomène dit de *sensitivité* (voir [Lions et Sanchez-Palencia,94]), c'est-à-dire que le problème est à sensibilité exacerbée par rapport aux données.

Une interprétation mécanique de ce phénomène est également donnée par J. L. Lions et E. Sanchez-Palencia qui considèrent l'exemple de la figure 5.3.1 : il s'agit d'une surface uniformément elliptique dont le bord est constitué par deux courbes fermées (des cercles) disjointes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . En fixant la surface sur une partie de  $\Gamma_1$  (ou sur  $\Gamma_1$  tout entier) d'après la proposition (4.1.2), elle est inhibée. Mais intuitivement (et par expérience), on constate une sorte d'instabilité. En appliquant de petits efforts sur la surface (la coque), elle *chancelle*.

Figure 5.3.1.

Nous terminons cette section par un exemple nouveau de surface inhibée, pour lequel le problème limite aboutit à un problème sensitif.

Soit  $S$ , avec une carte  $(\Omega, \mathbf{r})$ , une surface constituée de trois parties régulières  $H$ ,  $H_1$  et  $H_2$ , jointes le long de deux courbes :

$$\Gamma_1 = H \cap H_1 \text{ et } \Gamma_2 = H \cap H_2$$

formant deux plis à angle fixe, qui se rejoignent en un point  $M$  :

$$M = \Gamma_1 \cap \Gamma_2.$$

Figure 5.3.2.

On suppose que les plis forment un angle différent de 0 et de  $\pi$ .

On suppose de plus que  $H$  est uniformément hyperbolique et qu'il n'y a pas de lignes asymptotiques dans  $H$  séparant les deux plis (voir la figure 4.5.3).

D'après le théorème 4.5.6,  $H$  est inhibée au voisinage de  $M$ .

En supposant de plus que les deux courbes de pli sont transversales aux lignes asymptotiques de  $H$ , cette inhibition s'étend à  $H$  tout entier si elle est contenue dans les domaines de détermination issues des courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  (voir la remarque 4.5.7).

D'autre part, on choisit de prendre les parties  $H_1$  et  $H_2$  également hyperboliques. Si les courbes de plis  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont également transversales aux lignes asymptotiques de  $H_1$  et  $H_2$  respectivement ; c'est toujours le cas, par exemple, lorsque les courbes de plis sont planes (voir la remarque 4.5.5). L'inhibition de  $H$  entraîne donc, d'après la remarque 4.1.10 et la proposition 4.1.4, l'inhibition de  $H_1$  et  $H_2$  dans les domaines de détermination issues de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  respectivement.

En choisissant alors  $H_1$  et  $H_2$  de sorte qu'elles soient respectivement incluses dans les domaines de détermination des plis  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , nous obtenons que  $S$  est une surface entièrement inhibée.

**5.3.4. Proposition.** - *Soit  $S$  la surface inhibée constituée des trois parties hyperboliques formant deux plis à angle fixe décrite plus haut. Alors le problème limite (3.5.7) correspondant est un problème sensitif, c'est à dire que l'espace complété  $\mathbf{V}^a$  n'est pas contenu dans l'espace des distributions sur  $\Omega$ .*

*Preuve :* D'après (5.3.11), nous choisissons de travailler dans l'espace  $\mathbf{V}^m$ . Dans cet espace, la condition de continuité d'un déplacement  $\mathbf{u}$  le long d'un pli et la condition d'angle fixe s'écrivent, par exemple sur  $\Gamma_1$  :

$$(5.3.25) \quad \begin{cases} \mathbf{u}^H = \mathbf{u}^{H_1} \\ \delta\theta_1 = 0, \end{cases}$$

où  $\mathbf{u}^H$  (resp.  $\mathbf{u}^{H_1}$ ) désigne la restriction de  $\mathbf{u}$  sur  $H$  (resp. sur  $H_1$ ) et  $\delta\theta_1$  désigne la variation linéarisé de l'angle du pli.

Comme dans [Geymonat et Sanchez-Palencia,94], nous choisissons des bases covariantes orthonormales le long du pli  $\Gamma_1$ , et telles que dans les composantes covariantes  $(u_1, u_2, u_3)$ , la composante  $u_2$  désigne la composant tangentielle à la courbe de pli. Si bien que les conditions (5.3.20) deviennent :

$$(5.3.26) \quad \begin{cases} u_2^{H_1} = u_2^H \\ u_3^{H_1} = \frac{1}{2} [tg(\theta_1) \cdot (u_1^{H_1} + u_1^H)] - cotg(\theta_1) \cdot (u_1^{H_1} - u_1^H) \\ u_3^H = \frac{1}{2} [-tg(\theta_1) \cdot (u_1^{H_1} + u_1^H)] - cotg(\theta_1) \cdot (u_1^{H_1} - u_1^H) \\ u_{3,1}^{H_1} - u_{3,1}^H = b_{1\alpha}^H u_\alpha^H - b_{1\alpha}^{H_1} u_\alpha^{H_1}. \end{cases}$$

Or, dans le processus de complétion, une condition sur la trace de la composante normale  $u_3$  n'a plus de sens et donc, *disparaît* : dans  $\mathbf{V}^m$ , les conditions (5.3.21) se réduisent à :

$$(5.3.27) \quad u_2^H = u_2^{H_1}.$$

Par analogie, nous avons, le long du pli  $\Gamma_2$  :

$$(5.3.28) \quad u_2^H = u_2^{H_2}.$$

Nous rappelons qu'un déplacement est inextensionnel s'il satisfait au système de flexion (3.1.1), qui sous ses différentes formes réduites, est de nature hyperbolique dans la configuration de S, autrement dit : c'est un déplacement qui annule la forme  $a^m$ .

Considérons d'abord les parties H et  $H_2$  sur lesquelles, d'après la proposition 4.3.5, nous pouvons définir un déplacement inextensionnel non-trivial et satisfaisant aux conditions de continuité et d'angle fixe le long du pli  $\Gamma_2$ .

Plaçons nous alors le long du pli  $\Gamma_1$ . D'après le théorème d'existence et unicité du problème de Cauchy pour un système hyperbolique (voir la remarque 1.2.11), il suffit d'imposer le long de  $\Gamma_1$  :

$$(5.3.29) \quad \begin{cases} u_2^{H_1} = u_2^H \\ u_1^{H_1} \text{ quelconque.} \end{cases}$$

pour déterminer un déplacement inextensionnel non trivial  $\mathbf{u}^{H_1}$  sur  $H_1$ , et satisfaisant à la condition (5.3.27).

Nous définissons ainsi un déplacement inextensionnel, non-trivial sur S (qui n'est pas admissible dans  $\mathbf{V}$ !) et satisfaisant à la condition (5.3.27) le long du pli  $\Gamma_1$  et aux conditions (5.3.26) le long du pli  $\Gamma_2$ . C'est un déplacement non trivial, en particulier sur H. Si bien qu'il existe un compacte (non-vide)  $K \subset H$ , et il existe une fonction  $\varphi$  de classe  $C^\infty$  à support compact dans K et tel que

$$(5.3.31) \quad \langle \mathbf{u}, \varphi \rangle = \int_K \mathbf{u} \cdot \varphi \neq 0$$

Perturbons alors  $\mathbf{u}$  par une fonction  $\mathbf{v}^0$ . On choisit  $\mathbf{v}^0$  nulle sur  $H_2$  et au voisinage de  $\Gamma_2$  dans  $H$ . On choisit de plus  $\mathbf{v}^0$  telle que ses composantes tangentielles sont nulles sur  $H$  et sur  $H_1$ . Autrement dit, nous perturbons  $\mathbf{u}$  par suivant les composantes normales à  $H$  et à  $H_1$ . Grâce à l'hypothèse d'angle de pli différent de 0 et de  $\pi$ , il est possible de choisir  $\mathbf{v}^0$  telle que la condition de continuité de  $\mathbf{u} + \mathbf{v}^0$  le long de  $\Gamma_1$  soit satisfaite. On s'en convainc d'après la figure 5.3.3 :

Figure 5.3.3.

Bien entendu, on choisit également  $\mathbf{v}^0$  de sorte que la condition d'angle fixe soit de plus vérifiée, cela est possible parce que la composante normale suffit à contrôler l'égalité la quatrième égalité de (5.3.6).

Nous avons ainsi un déplacement  $\mathbf{u} + \mathbf{v}^0$  satisfaisant aux conditions de continuité du déplacement et d'angle fixe le long des deux plis  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

Nous construisons alors une suite de fonctions :

$$(5.3.32) \quad \mathbf{v}^n = \mathbf{v}^0 \times \mathbf{1}_{K_n}$$

où  $\mathbf{1}_{K_n}$  est la fonction indicatrice sur la partie  $K_n \subset H \cup H_1$ , et où les parties  $K_n$  sont définies comme une suite de voisinage de  $\Gamma_n$  telles que :

$$(5.3.33) \quad K_{n+1} \subset K_n \text{ et } |K_n| = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Il est clair alors que chaque fonction  $\mathbf{u} + \mathbf{v}^n$  satisfait aux conditions de continuité le long des plis et d'angle fixe (5.3.26) le long des plis  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . D'autre part, puisque la perturbation  $\mathbf{v}^o$  n'est portée que par sa composante normale (qui n'intervient pas en termes dérivées dans le tenseur de déformation linéarisé), nous avons :

$$\|\gamma(\mathbf{u} + \mathbf{v}^n)\|_{L^2(\Omega)} = \|\gamma(\mathbf{v}^n)\|_{L^2(\Omega)} \leq |K_n| \|\gamma(\mathbf{v}^o)\|_{L^2(\Omega)}.$$

D'où :

$$(5.3.34) \quad \|\gamma(\mathbf{u} + \mathbf{v}^n)\|_{L^2(\Omega)} \leq o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Autrement dit, la suite  $\mathbf{u} + \mathbf{v}^n$  est une suite de Cauchy dans l'espace  $\mathbf{V}^a$ .

Si bien que, si  $\mathbf{V}^a \subset D'$ , alors pour toute fonction  $\varphi$  de  $D(\Omega)$ , l'inégalité (5.3.34) impliquerait :

$$(5.3.35) \quad \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}^n, \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Or, pour le compact  $K$  de (5.3.31), à partir d'un certain rang ( $n$  suffisamment grand), nous avons :

$$K \cap K_n = \emptyset.$$

Enfin, puisque  $\mathbf{u}$  est non trivial, il existe  $\varphi$  de  $D(\Omega)$  à support dans  $K$  telle que pour tout  $n$  suffisamment grand, nous ayons :

$$(5.3.36) \quad \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}^n, \varphi \rangle = \langle \mathbf{u}, \varphi \rangle = \int_{\text{supp}(\varphi)} \mathbf{u} \cdot \varphi \neq 0.$$

ce qui est contradictoire avec (5.3.35). ■

---

## Références bibliographiques

---

- [Akian et Sanchez-Palencia,92] : J. L. AKIAN et E. SANCHEZ-PALENCIA, Approximation de coques élastiques minces par facettes planes. Phénomènes de blocage membranaire, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 315, série I, p. 363-369, 1992.
- [Amrouche et Girault,92] : C. AMROUCHE et V. GIRAULT, Propriétés fonctionnelles d'opérateurs, Rapport R90025, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, 1990.
- [Bernadou et Ciarlet,76] : M. BERNADOU et P. G. CIARLET, Sur l'ellipticité du modèle linéaire des coques de W. T. Koiter, *Computing Methods in Sciences and Engineering*, R. Glowinski, J. L. Lions editors, p. 89-136, *Lectures notes in Economics and Math. Systems*, Springer, n°134, 1976.
- [Bernadou, Ciarlet et Miara] : M. BERNADOU, P. G. CIARLET ET B MIARA, Existence theorems for two dimensionnal linear shell theories, *Journal of elasticity*, à paraître.
- [Bers,53] : L. BERS, Theory of pseudo-analytic functions, *New-york*, 1953.
- [Blouza et Le Dret] : A. BLOUZA ET H. LE DRET, Existence et unicité pour le modele de Koiter pour une coque peu régulière, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 319, série I, p. 1127-1132, 1994.
- [Brézis,83] : H. BREZIS, Analyse fonctionnelle. Théorie et applications, *Masson*, 1983.
- [Carleman,1939] : H. CARLEMAN, Sur un problème d'unicité pour les systèmes linéaires aux dérivées partielles à deux variables indépendantes, *Arkiv Math. Astr. Fys.*, Vol 26b n° 17 p. 1-9, 1939.
- [Choï et Sanchez-Palencia,93] : D. CHOÏ ET E. SANCHEZ-PALENCIA, Rigidification de surfaces réglées par des plis. Applications à la statique et à la dynamique des coques élastiques minces, p. 417-422, 1993.
- [Choï,93] : D. CHOÏ, Rigidité infinitésimale d'un type de pli d'une surface en déplacement inextensionnel, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 317, série I, p. 323-327, 1993.
- [Chazarain et Piriou,81] : A. CHAZARAIN et L. PIRIOU, Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires, *Gauthiers-Villard, Paris*, 1981.
- [Choquet] : G. CHOQUET, Cours d'analyse. Topologie., *Masson, Paris*, 1964.
- [Ciarlet et Lods,94] : P. G. CIARLET ET V. LODS, Analyse asymptotique des coques linéairement élastiques. I. Coques "membranaires", *C. R. Acad. Sci. Paris*, 318, p.863-868, 1994.
- [Ciarlet et Sanchez-Palencia,93] : P. G. CIARLET ET E. SANCHEZ-PALENCIA, Un théorème d'existence et d'unicité pour les équations des coques membranaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 317, p.801-805, 1993.

---

[Ciarlet et Sanchez-Palencia,95] : P. G. CIARLET ET E. SANCHEZ-PALENCIA, Ellipticity of bending and membrane shell equations, *Asymptotic Methods for Elastic Structures*, Eds. Ciarlet/Trabucho/Viano © by Walter de Gruyter & Co., Berlin . New York, 1995.

[Courant et Hilbert] : R. COURANT et D. HILBERT, Methods of Mathematical Physics, Vol. 2, *Interscience, New-York*, 1962.

[Darboux,1896] : G. DARBOUX, Théorie générale des surfaces. Vol. 4, *Gauthier-Villars, Paris*, 1896.

[Duvaut] : G. DUVAUT, Mécanique des milieux continus, *Masson, Paris*, 1990.

[Duvaut-Lions,72] : G DUVAUT et J. L. LIONS, Les inéquations en mécanique et en physique, *Dunod, Paris*, 1972.

[Deny et Lions,54] : J. DENY et J. L. LIONS, Les espaces du type de Beppo-Levi, *Annales de l'Institut Fourier*, n°5, p.305-370, 1954.

[Douglis and Nirenberg,1958] : A. DOUGLIS et L. NIRENBERG,

[Geymonat et Sanchez-Palencia,91] : G. GEYMONAT et E. SANCHEZ-PALENCIA, Remarques sur la rigidité infinitésimales de certaines surfaces elliptiques non-régulières, non convexes et applications, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 313, série I, p. 645-651, 1991.

[Geymonat et Sanchez-Palencia,95] : G. GEYMONAT et E. SANCHEZ-PALENCIA, On rigidity of certain surfaces with edges and application to shell theory, 1995.

[Goldenveizer, Lidski et Tovstik,79] : A. L. GOLDENVEIZER, V. B. LIDSKI et P. E. TOVSTIK, Free oscillations of thin elastic shells, en russe, *Nauka, Moscou*, 1979.

[Hadamard,64] : J. HADAMARD, La théorie des équations aux dérivées partielles, *Editions Scientifiques, Pékin*, 1964

[Hörmander,60] : L HÖRMANDER, Differential operators of principal type, *Math. Ann.* vol 140, p. 124-146, 1960.

[Hörmander,83] : L HÖRMANDER, Uniqueness theorems for second order elliptic equations, *Communications in Partial, Differential Equations*, n°8, p. 21-64, 1983.

[Klingenberg,81] : L. KLINGENBERG, A course in Differential Geometry, *Springer-Verlag*, 1981.

[Lewy,57] : H. LEWY, An example of a smooth linear partial differential equation without solution, *Ann. of Math.*, (2) 66, p. 154-158, 1957.

[Lions et Magenes,68] : J. L. LIONS et E MAGENES, Problèmes aux limites non-homogènes et applications, Vol. 1, *Dunod, Paris*, 1968.

[Lions et Sanchez-Palencia, 95] : J. L. LIONS et E. SANCHEZ-PALENCIA, Problèmes sensitifs et coques élastiques minces, *Acte du Colloque A la mémoire de Pierre Grisvard, Birkhauser, à paraître* (1995).

---

[Lions et Sanchez-Palencia,94] : J. L. LIONS et E. SANCHEZ-PALENCIA, Problèmes aux limites sensitifs, *C. R. Acad. Sci. Paris, série I*, 319, p. 1021-1026, 1994.

[Lions,67] : J. L. LIONS, Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, *Presse de l'université de Montréal*, 1967.

[Lions,73] : J. L. LIONS, Perturbations singulières dans les problèmes aux limites, *Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin*, Vol 323, 1973.

[Necas,66] : J. NECAS, Equations aux dérivées partielles, *Presse de l'Université de Montréal*, 1966.

[Niordson,85] : F. NIORSON, Shell theory, *North Holland, Amsterdam*, 1985.

[Pogorelov] : I. POGORELOV, Extrinsic geometry of convex surfaces, *American Mahtematical Society, Providence*, 1973

[Sanchez-Palencia,89] : E. SANCHEZ-PALENCIA, Statique et dynamique des coques minces, I et II, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 309, série I, p. 411-417 et 531 et 537, 1989.

[Sanchez-Palencia,90] : E. SANCHEZ-PALENCIA, Passage à la limite de l'élasticité tridimensionnel à la théorie asymptotique des coques minces, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 311, série II, p.909-916, 1990.

[Sanchez-Palencia,92] : E. SANCHEZ-PALENCIA, Asymptotic and spectral properties of a class of singular-stiff problems, *J. Mathématiques Pures et Appliquées*, 71, p. 379-406, 1992.

[Smirnov,64] : V. I SMIRNOV, Course of Higher Mathematics, Vol 5, *Pergamon, Oxford*, 1964.

[Spivak,75] : M. SPIVAK, A comprehensive introduction to Differential Geometry, Vol. 5, *Publish or Perish Inc.*, 1975.

[Stoker,69] : J. J. STOKER, Differential geometry, *J. Wiley, New-York*, 1969.

[Trèves,65] : F. TREVES, Cours sur les équations aux dérivées partielles linéaires, (*I.H.P. 65-66*) *secrétariat mathématiques de l'E.N.S.*, 1965.

[Vekua,59] : I. N. VEKUA, Generalised analytic functions, English translation, *Pergamon Press*, 1959.